目　录

§ 1　从列算式到列方程 …………………………（ 1 ）

§ 2　数域与方程的解 …………………………（ 5 ）

§ 3　二次方程的进一步讨论 ……………………（ 8 ）

§ 4　三次方程的公式解 ………………………（ 14 ）

§ 5　四次方程的公式解 ………………………（ 25 ）

§ 6　一些特殊高次方程的解法 …………………（ 31 ）

§ 7　韦达定理与对称多项式 ……………………（ 40 ）

§ 8　多项式的可除性 …………………………（ 50 ）

§ 9　最高公因式 ………………………………（ 58 ）

§ 10　多项式的因式分解 ………………………（ 66 ）

§ 11　代数基本定理 ……………………………（ 71 ）

§ 12　多项式的插值公式 ………………………（ 78 ）

§ 13　多项式根的界限 …………………………（ 82 ）

§ 14　根的近似计算 ……………………………（ 89 ）

§ 15　多项式导函数的应用 ……………………（ 96 ）

§ 1　从列算式到列方程

大家知道，在算术里，用列算式来解应用题，需要经过一番相当的思考；可是，一旦改用列方程的代数解法，问题却变得比较简单了.

为什么用算术解法显得困难，而用代数解法却变得容易呢？其中的“奥妙”在哪里呢？让我们看一个例子.

例　敌机以每分钟16公里速度窜犯我领空，我机以每分钟22公里速度出击相距289公里处的敌机，在相距0.3公里时开炮而击落敌机，问我机飞行时间（炮弹飞行时间忽略不计）.

列算式的算术解法：敌我两机相向而行，以每分钟(22+16)公里的速度接近，接近到0.3公里处敌机被击落，因而敌我两机相向飞行的总距离是(289−0.3)公里，最后可得

$$\text{我机飞行时间}=\frac{289-0.3}{22+16}\approx 7.6\,(\text{分}). \qquad (1)$$

列方程的代数解法：设我机飞行时间为x分钟，将问题的条件“翻译”为等式，可得

$$22x+16x+0.3=289, \qquad (2)$$

通过移项、合并同类项，最后得

$$x=\frac{289-0.3}{22+16}. \qquad (3)$$

由上看到，用算术解法所列出的等式(1)，恰好就是代数解法最后得到的等式(3). 这就是说，列算式的算术解法，从头至尾全凭思考、分析，一次就要给出一个未知数在一边已知数在

另一边的等量关系(3)，难度较高．列方程的代数解法只要列出等量关系(2)，而从(2)至(3)则已是十分自然的程式化的运算，这样，用符号及运算代替了算术解法中的一部分思考，使难度降低了．这种程式化的过渡实现了对“算术解法的无一定规则进行思考”的突破．须知，这种突破归功于用字母代“数”、设未知数以及正负数运算法则的三者结合，这也就是变难为易的奥妙所在．详细地说，用字母代“数”提供了表达一般的数量关系的可能；“设未知数 x”使“未知”暂时看作“已知”，和各已知数“一视同仁”、“地位平等”，从而列出方程；最后利用正负数运算解出“未知”，实现了“未知”——“暂时已知”——“解出未知”这样一个由未知到已知的矛盾转化．

顺便指出，如果遇到一个算术应用题，我们不会列算式的话，那么只要用代数的办法列出方程，移项、合并同类项，但保留一切数据而不化简，最后求得的未知数 x 的算式，就是算术解法里所要列出的算式．在这个算式中恢复各数据本来的具体意义，就不难找出列算式的思路．

总之，用列方程的代数解法来解决实际问题，是势在必行，成为数学发展的必然了．

现在我们可以仔细地讨论一下“什么是方程”了．

最初等的一种提法是：含有未知数的等式叫做方程．这种定义仅是描述性的、形式的，还未涉及方程的“内在”．方程概念的完整定义，可以从函数观点这一角度给出，也可以从纯粹的抽象代数这种角度上给出．在具有一定代数结构的集合上的多项式理论建立之后，我们就可以纯代数地给出方程概念的定义．我们不能在这本通俗读物中给出这一方面的介绍．下面，只给出函数观点下的一元方程的定义．

定义 设函数 $f(x)$，$g(x)$在数集M上有定义，由这两个函数建立的关系式

$$f(x)=g(x)$$

叫做方程. 如果自变量 x 在M上取到数值 α，使等式

$$f(\alpha)=g(\alpha)$$

成立，那么 α 就叫做这个方程在数集M上的一个解或根.

显然，根据方程解的定义，方程

$$f(x)=g(x) \quad 与 \quad [f(x)-g(x)]=0$$

具有相同的解，即是两个具有同样解的方程. 因此，讨论方程时，也可以仅讨论方程右端为 0 的情形，即讨论形如

$$F(x)=0$$

的方程.

以函数 $F(x)$ 的类型，我们来定名方程的类型.

当 $F(x)$ 为多项式（整式）函数、分式函数、或还含无理函数时，相应的方程 $F(x)=0$ 分别叫做整式方程、分式方程及无理方程. 整式与分式方程统称有理方程，有理与无理方程又统称代数方程.

当 $F(x)$ 除含代数运算外，还含指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数时，相应的方程 $F(x)=0$ 分别叫做指数方程、对数方程、三角方程及反三角方程. 它们统称超越方程，即$F(x)$还含初等超越函数时，相应的方程 $F(x)=0$ 叫做超越方程.

无理方程常可通过“有理化”分式方程通过“整式化”化为整式方程. 因此，从理论上讲，研究代数方程的重点是研究整式方程.

由 n 次多项式得到的方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq0),$$

叫做 n 次代数方程，或简称为 n 次方程，其中系数 $a_0, a_1, \cdots\cdots,$

a_n取实数或复数，或根据需要规定为整数或有理数．

思考与练习

1. 对于一个未知数的应用题，为什么用列方程的代数解法比算术解法容易得多？
2. 试比较方程的描述性定义与方程的函数定义．为什么中学教学时常采用前一定义，而施教者必须弄懂后一定义？（后一定义是两个方程是否同解的理论根据）
3. 选择一个较难的算术应用题，用列方程的代数解法诱导出算术解法．

§ 2 数域与方程的解

通常，在给出方程时，方程中的函数的定义域并未明确指出，因此这种函数定义域常理解为使函数有意义的数集．使函数有意义是什么意思呢？函数$\sqrt{x}$，在实数范围里考虑，只对$x\geqslant 0$有意义，其定义域为$[0,+\infty)$；如果在复数范围里考虑，那么对一切实数与复数都有意义，其定义域为数平面，即全部复数．

还有，n次方程中的n次多项式的函数，它的定义域是什么呢？显然，这完全是人为赋予的，可以是全体整数，可以是全体有理数、全体实数，更可以是全体复数．总之，视我们预先的假定而定．

这样一来，什么叫做方程有解、无解呢？问题的回答就复杂了．

$2x-3=0$，在自然数集上无解，在分数集合上有解；

$2x+3=0$，在正数集合上无解，在有理数集上有解；

$x^2-2=0$，在有理数集上无解，在实数集上有解；

$x^2+1=0$，在实数集上无解，在复数集上有解；

$\frac{1}{x}=0$，在普通的数集上无解，在近代新产生的非标准数集上有解，其解为非标准数无穷大．

把上述方程问题放在抽象代数里讨论，就显得更为一般．某个方程在某个具有某种运算的集合里无解，而当这个集合扩张以后，那么在扩张后的集合里就可能有解了．

历史的进程表明，无理数、正负数以及虚数这些数概念发展中的主要里程碑，都是因解决方程问题遇到了障碍而研究、建立的. 至于代数数（如整数，有理数、以及$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$等）与超越数（如π，e等）也以是否是整系数整式方程的解而区分的. 总之，方程问题传递了实践要求建立新数的信息，而新数的建立反过来又解决了方程问题；在新的高度上，新的方程问题又再传递实践要求建立新的运算对象的信息. 方程与数正是这样互为因果、互相促进、辩证地向前发展的.

也许会产生这样的疑问：方程有解、无解这种相对性，不确定性，不是使方程解的研究变得毫无意义了吗？能否这样说，$x^2=-1$无解，我们制造了一个形式符号$i=\sqrt{-1}$，把i当作$x^2=-1$的解，方程$x^2=-1$不就有解了吗？如果这个办法可行的话，那么任何方程都可以定义一个解，解方程就变得十分轻而易举和毫无意义了. 事实并非如此. 把纯粹符号$i=\sqrt{-1}$当作方程$x^2=-1$的解，这无非是一种自我安慰，用未知来回答未知的办法，丝毫未给我们增加什么知识，最多不过是搞了一个形式解. 要把形式解$x=i$转化为真正有意义的解，就必须使符号$i=\sqrt{-1}$变成“数”——可运算的对象，亦即在实数与i之间找出一套运算规律，使$a+bi$（a,b为实数）受控于这套所谓复数的运算规律，到了这个时候，我们把具有运算能力的i叫做方程$x^2=-1$的解，就变的十分有意义了. 只有在这以后，i所反映的客观背景才有可能弄清楚：它代表垂直于横轴的单位向量，“i乘以数平面某点”的作用，就等于把该点绕原点旋转90°.

今后我们把有理数全体、实数全体、复数全体，分别叫做有理数域、实数域、复数域. 这是三个最常用的最重要的数域（数域有它特定的定义，可在高等代数书中查到）.

综合上述，数域和解方程是密切相关的．首先要弄清在什么数集、数域上讨论方程这个前提，然后再确定在该数集、数域上方程是否有解，解是什么，或近似解是什么．

思考与练习

1．方程有解无解的确切含义是什么？

2．你是否可以论述一下，方程的研究对每次数概念扩张的重大作用．

§ 3　二次方程的进一步讨论

我们在复数域上讨论二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0). \tag{1}$$

一、　用未知数代换法解二次方程

为了消除二次方程的一次项并求得解，我们作如下未知数代换：

$$x=y-\frac{b}{2a};$$

于是，方程 (1) 化为

$$a\left(y-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(y-\frac{b}{2a}\right)+c=0,$$

$$ay^2-\frac{b^2}{4a}+c=0,$$

$$y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

从而方程 (1) 在复数域里有两个解或两个根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

当 $b^2-4ac\neq 0$ 时，二次方程在复数域里有两个不相同的

根．对于实系数二次方程，若 $b^2-4ac>0$，则二次方程有两个不相同的实根，若 $b^2-4ac<0$，则有一对共轭复根．

当 $b^2-4ac=0$ 时，二次方程的二个根相同．这时，我们把这个根$\left(x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\right)$叫做该二次方程的重根．

未知数代换或变量代换法，是转变运算形式利于解决问题的有力杠杆，必须细心加以领会．在解三次、四次方程或其他方程时，我们将会进一步看到这种方法的优越、简捷，在高等数学里，这种方法更是被广泛地应用着．

二、根与系数的关系——韦达定理

由 (2) 可以验证

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases} \tag{3}$$

现在再直接给出上述证明：设 x_1，x_2 为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，那么有

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

或

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

比较上式两端系数，即有 (3) 式．

(3) 式称为根与系数关系的韦达（法国数学家，1540—1603）定理，它深刻地揭示了整式代数方程根与系数之间的内在联系．我们在 § 7 还要详细讨论．对于二次项系数为 1 的二次方程，它的一次项系数是两根之和的相反数，它的常数项是两

根之积.

利用韦达定理可以使有关二次方程的习题解法简捷方便.

例 1 （1955年全国高考试题）试以 $x^2-3x-1=0$ 的两根的平方为两根作一个二次方程.

解 设方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根为 α,β，则由韦达定理得

$$\alpha+\beta=3, \qquad \alpha\beta=-1.$$

因为

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11,$$
$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1,$$

所以又由韦达定理作得所求的二次方程是

$$y^2-11y+1=0.$$

例 2 不直接解出方程 $6x^2-x-2=0$，求作新的二次方程，使它的根是原方程根的倒数.

解 设方程 $6x^2-x-2=0$ 的两根为 α,β，则由韦达定理得

$$\alpha+\beta=\frac{1}{6}, \qquad \alpha\beta=-\frac{1}{3}.$$

因为

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}\times(-3)=-\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-3,$$

所以又由韦达定理作得所求的方程是

$$y^2+\frac{1}{2}y-3=0 \qquad 或 \qquad 2y^2+y-6=0.$$

例 3 试求以方程 $x^2+6x+10=0$ 的两根之立方作两根的

二次方程.

解 设方程 $x^2+6x+10=0$ 的两根为 α,β，则有

$$\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\cdot\beta)^3=10^3=1000,$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-6)^3-3\cdot10\cdot(-6)=-36,\end{aligned}$$

所以所求的方程是

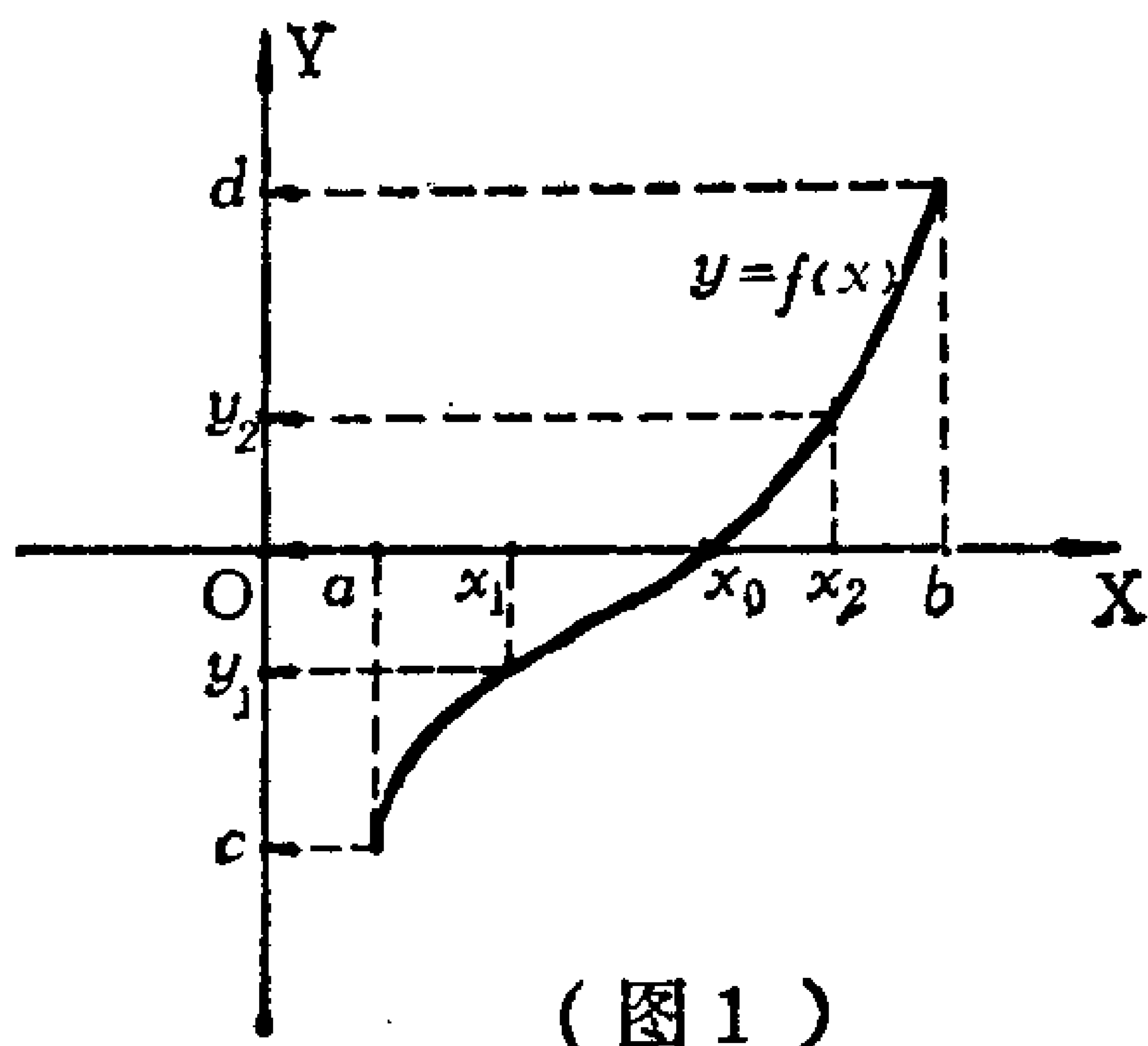
$$y^2+36y+1000=0.$$

三、二次方程的复根的几何意义

当方程 $f(x)=0$ 有实根 x_0 时，通常其几何意义是，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相交于或切于点$(x_0,0)$. 这样,我们在实数域上讨论方程 $f(x)=0$ 的解时，常以曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴有没有交点（或切点）而论 $f(x)=0$ 有没有解.

在复数域上讨论方程 $f(x)=0$ 时，当曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴无交点时，显然该相应的方程无实根，但是可以有复根. 如 $x^2+1=0$，无实根但有两个复根$(\pm i,\ i^2=-1)$. 曲线 $y=f(x)$ 不与 x 轴相交，但都有复根，这在几何上如何解释呢？能不能再用曲线相交的办法来解释方程的复根呢？这种办法行不通了，需要新的办法.

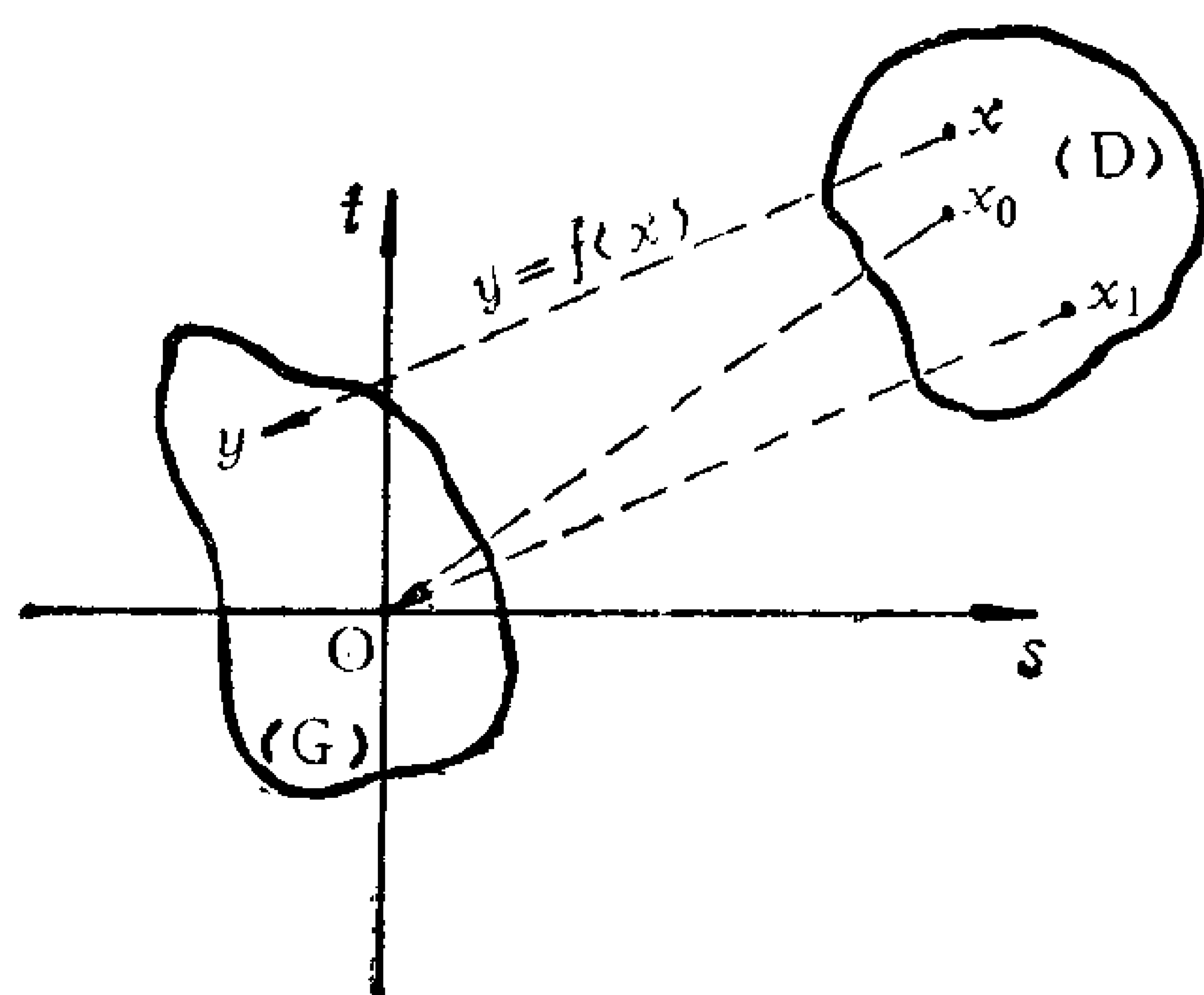
我们还是从方程 $f(x)=0$ 有实根的几何意义谈起，用一种新的观点来看这种几何意义. 如图1的情形，x 轴上的区间$[a,b]$通过函数 $y=f(x)$ 的对应，变到了或说映照到了 y 轴上的区间$[c,d]$，



（图1）

比如，函数 $y=f(x)$ 把 x 轴上的点 a 映照到 y 轴点 c：$a \longrightarrow c$，以及 $b \longrightarrow d$，$x_1 \longrightarrow y_1$，$x_2 \longrightarrow y_2$；特别，把 x 轴上的 x_0 映照到 y 轴上的零点：$x_0 \xrightarrow{y=f(x)} 0$。这样一来，方程 $f(x)=0$ 的根的几何意义，又可解释为在函数 $y=f(x)$ 的映照下，映照到 y 轴上的零点的那些 x 轴上的点，其横坐标就是方程 $f(x)=0$ 的根．形象地说，在函数对应关系 $y=f(x)$ 下，x 轴上的点（指 $f(x)$ 有定义的点）都"搬家"到了 y 轴上，其中搬到 y 轴上零点的那些 x，就是方程 $f(x)=0$ 的根．

把上述认识用于复数的情形，我们就可以获得方程有复根的几何意义．这时，x 与 y 均取复数，复函数 $y=f(x)$ 可以把复平面的一块区域（如图 2 的 (D)）映照到另一块区域（如图 2 的 (G)）．在复函数 $y=f(x)$ 的对应下，映照到原点的那些 x_0，x_1，…就是方程 $f(x)=0$ 的复根．因此，$f(x)=0$ 的复根的几何意义是：在函数 $y=f(x)$ 的对应或映照下，映照到原点的那些复数点，就是方程 $f(x)=0$ 的复根．



（图 2）

如果复函数 $y=f(x)$ 在全复平面上有定义，那么在映照 $y=f(x)$ 下，复平面上的点 x 就变到复平面上的点 y．凡是变到或映照到原点的所有复数点，则都是方程 $f(x)=0$ 的复根．如 $y=x^2+1$，将 $\pm i\,(i^2=-1)$ 映照到原点，故 $x=\pm i$ 是方程 $x^2+1=0$ 的根．

二次方程，有且只有两个复根(二重根算两个)，这就是说，在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的映照下，复平面上有且只有两个复数点(二重点算两个)被映照到原点.

我们还可以断言，n 次方程一定有且只有 n 个复根(k 重根算 k 个)，亦即 n 次函数有且只有 n 个复数点(k 重点算 k 个)被映照到原点. 这一结论我们将§11中证明，这就是著名的代数基本定理的直接推论.

思考与练习

1. 试由二次方程根的公式中指出，二次方程根是通过对系数的哪些运算得到的. 还可以看一看，这些运算是否恰好是形成二次函数所施用的那些运算的逆运算.
2. 试给出二次方程有复根的几何解释.
3. (1956年高考试题)设 m 是实数，求证：方程 $2x^2+(4m-1)x-m^2-m=0$ 的两根必定都是实数.
4. 设 α,β 为方程 $x^2+mx+m^2+2=0$ 之两根，则 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+2=0$，试证之.
5. 设 $x^2+ax+b=0$ 两根之差与 $x^2+px+q=0$ 两根之差相等，试证 $a^2-4b=p^2-4q$.
6. (1965年高考试题)当 p 是什么实数时，方程 $x^2-px-3=0$ 与方程 $x^2-4x-(p-1)=0$ 有一个公共根，并求出这个公共根.
7. 求函数 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的值域.

   (提示：将原式化为 $y(x^2+x+1)=x^2-x+1$，$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$，决定使 x 有解的 y 值，为此可使用判别式 $b^2-4ac\geqslant0$ 讨论.)

§4 三次方程的公式解

以后，我们常在复数域上讨论高次方程的解，为此，我们必需对根号$\sqrt[n]{\ }$之含义的演变作一番阐明.

在实数域里，为了运算能单值地进行，即运算单值化，我们约定根式$\sqrt[n]{a}$代表唯一的一个值. 当n为奇数$2k+1$时，实数a的奇数次方根在实数域里只有一个根，我们就用$\sqrt[2k+1]{a}$代表这个唯一的实数值. 当n为偶数$2k$时，正数a的偶数次方根在实数域里就不止一个；如4的平方根是± 2. 为了单值化，我们约定用记号$\sqrt[2k]{a}\,(a>0)$代表a的$2k$次方根中的那个正根，并称之为a的算术根. 这样，4的平方根为± 2，而$\sqrt{4}$却总代表4的算术平方根，它等于2，不能把"4的平方根"这句话与"$\sqrt{4}$"等同. 因此，在实数域里讨论，等式$\sqrt{a^2}=|a|$，$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$是必须加以强调的.

但是，在复数域里讨论，算术根概念已变得没有必要了. 因为在复数中，并没有正复数与负复数之分，不象正负实数那样占有特定的位置. 再者，在复数域里需要彻底解决一个数的全部方根的问题. 为了这种"求全"，我们规定：记号$\sqrt[n]{a}$（a为复数，特殊情况下可以是实数）代表a的所有n次根的集合（在§11中将证明，$\sqrt[n]{a}\,(a\neq 0)$代表n个不同的值）.

这样，在实数域里，$\sqrt{4}=2$，其中"$\sqrt{\ }$"是算术根记号；在复数域里，$\sqrt{4}=\pm 2$，其中"$\sqrt{\ }$"是代表全部平方根的记号. 在实数域中讨论问题时，我们视$\sqrt{4}=\pm 2$为错误，正确的是$\sqrt{4}=2$；但是在复数域中讨论问题时，常常会遇到$\sqrt{4}=2$

与$\sqrt{4}=\pm 2$. 这时，就要作相应的理解，不应混淆. 记号$\sqrt{\ }$的意义之演变，是我们需要特别留意的.

有时为了明确起见，我们把正数 a 在实数域中的那个正根记作$\underset{+}{\sqrt[n]{a}}$. 但是，在很多情形下，对于记号$\sqrt[n]{\ }$常要根据行文的需要作相应的理解，有时指算术根，有时指全部根.

一、1 的三次方根

在实数域里$\sqrt[3]{1}=1$，在复数域里它代表三个值.

从

$$x^3-1=0 \quad 或 \quad (x-1)(x^2+x+1)=0$$

看出，$\sqrt[3]{1}$在复数域里的三个值是

$$\omega_0=1,\ \omega_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \omega_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

还可以验证如下一些重要关系式:

$$\omega_1^2=\omega_2,\ \omega_2^2=\omega_1,\ \omega_1\omega_2=\omega_1^3=1,\ \omega_2\omega_1=\omega_2^3=1.$$

二、实数的三次方根

当 $a>0$ 时，$\sqrt[3]{a}$在复数域里所代表三个根是

$$\underset{+}{\sqrt[3]{a}},\qquad \underset{+}{\sqrt[3]{a}}\,\omega_1,\qquad \underset{+}{\sqrt[3]{a}}\,\omega_2, \tag{2}$$

其中$\underset{+}{\sqrt[3]{a}}$表示正数 a 在实数域里的算术根.

当 $a<0$ 时，$\sqrt[3]{a}$在复数域里的三个根是

$$-\underset{+}{\sqrt[3]{|a|}},\qquad -\underset{+}{\sqrt[3]{|a|}}\,\omega_1,\qquad -\underset{+}{\sqrt[3]{|a|}}\,\omega_2. \tag{3}$$

当 $a=0$ 时，则$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{0}=0$是三重根.

三、复数的三次方根

将复数 a 写成复数的三角形式

$$a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

其中 $|a|$ 是复数 a 的模，φ 是复数 a 的幅角．复数 a 的三次方根为

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{|a|}_{+}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2. \tag{4}$$

四、三次方程的公式解

解方程实在是一个不断分离未知数与已知数据的过程．解一次方程时，用移项，去括号，去分母等办法分离未知数，将未知数集中在等式一边，已知数据集中在等式另一边，最后求得未知数．解二次方程时，通过配方、因式分解、未知数代换等办法，使方程降阶——二次降至一次，最后再分离出未知数，求得解答．

对于三次方程，我们可以充分运用未知数代换的方法，将三次方程降阶，转化为易于求解的形式．

不失一般性，我们设三次方程为

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

因为若三次项系数不为 1，则将方程各项除以三次项系数即可．

象二次方程那样，我们通过未知数代换消除三次方程的二次项．令 $x=y-\frac{a}{3}$，那么通过简单的计算就得到缺二次项的三次方程

$$y^3+py+q=0.$$

因此，我们只需讨论缺二次项的三次方程的公式解即可．

不妨将未知数仍记作 x，即讨论方程

$$x^3+px+q=0. \tag{2}$$

为了解方程 (2)，我们将未知数拆成两个未知数，按要求调节这两个未知数的大小，使问题转化为易于解决的形式．令

$$x=y+z,$$

代入 (2) 得

$$(y+z)^3+p(y+z)+q=0,$$

或

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0. \tag{3}$$

我们选取 y，z，使

$$3yz+p=0 \quad 即 \quad yz=-\frac{p}{3},$$

于是有

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{4}$$

又由 (3) 式得

$$y^3+z^3=-q. \tag{5}$$

将二次方程的韦达定理用于 (4) (5) 两式，就知 y^3，z^3 是下面二次方程

$$u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0 \tag{6}$$

的解．解此二次方程得

$$\begin{cases} y^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}, \\ z^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}, \end{cases} \tag{7}$$

求出 y，z，最后求得三次方程 (3) 的公式解：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \qquad (8)$$

但是必须满足条件 $yz=-\frac{p}{3}$.

在公式 (8) 中，平方根式常理解为算术根$\left(当\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\right)$或一个复根$\left(当\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0\right)$，而立方根式常理解复数域中讨论的求全部立方根的记号.

设 y_1，z_1 分别是 y，z 的三个根中的一个，且满足

$$y_1z_1=-\frac{p}{3},$$

那么可以验证方程 (2) 的三个根是

$$\begin{cases} x_1=y_1+z_1, \\ x_2=y_1\omega_1+z_1\omega_2, \\ x_3=y_1\omega_2+z_1\omega_1, \end{cases} \qquad (9)$$

其中 ω_1，ω_2 是$\sqrt[3]{1}$的不等于 1 的两个立方根：

$$\omega_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

事实上，

$$(y_1\omega_1)(z_1\omega_2)=y_1z_1\omega_1\omega_2=y_1z_1=-\frac{p}{3},$$

$$(y_1\omega_2)(z_1\omega_1)=y_1z_1\omega_2\omega_1=y_1z_1=-\frac{p}{3}.$$

在实系数三次方程 $x^3+px+q=0$ 的情形下，平方根号下面的式子 $\varDelta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 起着判别式的作用.

（Ⅰ）$\varDelta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$，方程（2）有一个实根及一对共轭复根；

（Ⅱ）$\varDelta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$，方程（2）的根都是实根，其中有两个相等；

（Ⅲ）$\varDelta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$，方程（2）有三个相异的实根.

需要特别指出的是，实系数方程（2）的三个相异实根的公式解，是绕道通过复数域才求得的，这又可说明虚数的巨大作用，借助于它，才解决了三次方程求实根的问题．这个事实本身表明，虚数起着不虚的作用，它是数学运算必然导致的结果.

现在我们来证明在 $\varDelta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 的情况下，三次方程 $x^3+px^2+q=0$ 有三个相异实根，并且建立它们的公式.

我们先证明三次方程公式解中，条件 $yz=-\frac{p}{3}$ 在现在情形下可转化为 y 与 z 互为共轭．为此设 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-t^2$，于是

$$|y|=\left|\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right|$$

$$=\left|\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+it}\right|=\sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2}+it\right|}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+t^2}}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\sqrt{\frac{-p}{3}},$$

因为$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$，所以系数 p 必为负，故$\sqrt{\frac{-p}{3}}$是正数.

条件 $yz=-\frac{p}{3}$，这时变为

$$yz=-\frac{p}{3}=|y|^2,$$

所以 $$z=\frac{|y|^2}{y}=\frac{y\bar{y}}{y}=\bar{y},$$

这就表明 z 与 y 互为共轭. 设 $y=y_r+iy_i$，其中 y_r, y_i 是 y 的实部，虚部. 因此相应的三次方程的三个根分别是

$$\begin{cases} x_1=y+z=y+\bar{y}=2y_r, \\ x_2=y\omega_1+z\omega_2=y\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \qquad +z\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \quad =-\frac{1}{2}(y+z)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z) \\ \quad =-y_r-y_i\sqrt{3}, \\ x_3=y\omega_2+z\omega_1=-y_r+y_i\sqrt{3}. \end{cases} \tag{10}$$

公式(10)既表明方程(2)在$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$的条件下有三个实根，又给出了求根公式.

例1　试求解三次方程$x^3-6x+6=0$.

解　先计算判别式:

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{36}{4}+\frac{-216}{27}=9-8=1>0,$$

因此该三次方程有一个实根及一对共轭复根.

再求

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{-3+1}=-\sqrt[3]{2},$$

为了求$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$，必须使$yz=-\frac{p}{3}$,所以

$$z=-\frac{p}{3y}=-\frac{-6}{3\sqrt[3]{-2}}=-\sqrt[3]{4}.$$

由公式(9)，得到方程的三个根是

$$x_1=y+z=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\approx-2.843,$$

$$x_2=y\omega_1+z\omega_2=-\sqrt[3]{2}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$-\sqrt[3]{4}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\approx1.422+0.327i,$$

$$x_3=y\omega_2+z\omega_1=-\sqrt[3]{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$-\sqrt[3]{4}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\approx 1.422-0.327i.$$

例 2 试解三次方程 $x^3+12x^2+24x-64=0$.

解 令 $x=u-\frac{12}{3}=u-4$，得

$$(u-4)^3+12(u-4)^2+24(u-4)-64=0,$$
$$u^3-12u^2+48u-64+12u^2-96u+192$$
$$+24u-96-64=0,$$
$$u^3-24u-32=0.$$

计算它的判别式

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=256-512=-256<0,$$

可知方程有三个相异实根.

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{16+16i}$$

$$=\sqrt[3]{16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

由公式 (10)，求得 u 的三个根为

$$u_1=2y_r=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},$$

$$u_2=-y_r-y_i\sqrt{3}$$

$$=-2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-4,$$

$$u_3=-y_r+y_i\sqrt{3}$$

$$=-2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$=4\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}.$$

最后求得原方程的三个实根是

$$x_1=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}-4,$$

$$x_2=-8,$$

$$x_3=4\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}-4.$$

思 考 与 练 习

1. 将 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 进行未知数代换化为缺二次项的三次方程.
2. 试述“未知数代换”在建立三次方程公式解中的作用.
3. 用公式解法和因式分解法解三次方程 $x^3-3x+2=0$.
4. 解方程 $x^3+6x+4=0$.
5. 解方程 $x^3-6x+4=0$.
6. 试证实系数三次方程 $x^3+px+q=0$ 在 $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 时，有三个实根，并且其中有两个根相等. 此时，三个实根都相等可以吗？举例说明.

§ 5　四次方程的公式解

设四次方程的一般形式是

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

由于含有 x 的四次，所以可以利用第1、2两项配出一个完全平方，而将其余的项移至方程的右端，即

$$x^4+ax^3=-bx^2-cx-d,$$

$$x^4+ax^3+\frac{a^2x^2}{4}=-bx^2-cx-d+\frac{a^2x^2}{4},$$

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d.$$

再在上述最后一个方程的两端加上

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)y+\frac{y^2}{4},$$

使方程左端成完全平方：

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right), \tag{2}$$

其中我们引入一个新的未知数 y，是待定的，将根据需要确定它.

y 的变动，引起(2)式右端的系数的变动，从而影响二次三项式

$$\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x$$

$$+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \tag{3}$$

的根的性态，为使(3)具有重根而成为完全平方，只需

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)$$

$$\times\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0 \tag{4}$$

即可．(4)式是y的三次方程，可以用公式解解出．设它的一个根为y_0，于是置$y=y_0$，(3)式可变为完全平方$(\alpha x+\beta)^2$，(2)式变为

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}\right)^2=(\alpha x+\beta)^2, \tag{5}$$

由此得到两个二次方程：

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=\alpha x+\beta, \tag{6}$$

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=-\alpha x-\beta. \tag{7}$$

由这两个二次方程，我们就可以求得四次方程的四个根．

从上看到，用公式解一个四次方程可归结为解一个辅助三次方程和两个二次方程．由于公式复杂，不敷实用，所以解题时只需根据上述推导公式的思想方法即可。

例 解方程$x^4-2x^2+8x-3=0$。

解 第一步：二次配方手续．

原方程通过第一次配方，变为

$$(x^2-1)^2+8x-4=0.$$

再引入参变量y，对上述方程再次配方，得

$$\left(x^2-1+\frac{y}{2}\right)^2$$

$$-\left[(x^2-1)y+\frac{y^2}{4}-8x+4\right]=0,$$

$$\left(x^2-1+\frac{y}{2}\right)^2$$

$$-\left[yx^2-8x+\left(\frac{y^2}{4}-y+4\right)\right]=0.$$

第二步：选取适当 y 将方程化为平方差形式.

为使 $yx^2-8x+\left(\frac{y^2}{4}-y+4\right)$构成完全平方，只需

$$(-8)^2-4\cdot y\left(\frac{y^2}{4}-y+4\right)=0,$$

$$64-y^3+4y^2-16y=0,$$

$$y^3-4y^2+16y-64=0,$$

通过试探得到 $y=4$ 满足上述方程：于是当 $y=4$ 时，

$$yx^2-8x+\left(\frac{y^2}{4}-y+4\right)$$

$$=4x^2-8x+(4-4+4)$$

$$=[2(x-1)]^2,$$

第一步的最后一个方程变为

$$(x^2-1+2)^2-[2(x-1)]^2=0.$$

第三步：解两个二次方程.

利用平方差公式，第二步最后一式变为

$$(x^2+2x-1)(x^2-2x+2)=0,$$

于是

$$x^2+2x-1=0,$$

$$x^2-2x+3=0.$$

由此解得原四次方程的四个根是

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2},$$

$$x_{3,4}=1\pm i\sqrt{2}.$$

最后，谈谈关于整式代数方程公式解的历史是十分有意义的.

二次方程的最早记载是公元前两千年左右的巴比伦文献，但不知道古巴比伦人如何解二次方程. 古希腊人已经会求一些具体的二次方程的解. 第三世纪我国数学家赵君卿注《周髀算经》时，提出了 $x^2-bx+c=0$ 型的求根公式，这是世界上最早的二次方程求根公式记录. 到了第九世纪，乌兹别克数学家花剌子模给出了现今使用的二次方程标准求根公式.

三次、四次方程的求根公式一直到十六世纪才由意大利数学家给出. 现今的三次方程的求根公式常叫卡丹公式. 其实这个公式不是卡丹（1501-1576）发现的，最早是由塔尔塔里雅（1500-1557）发现的. 当时意大利流行数学竞赛会，数学家们都竭力保持自己发现的秘密以便在数学竞赛会上击败别人而一鸣惊人. 塔尔塔里雅估计他的对手佛罗雷都斯会提出关于三次方程求解问题，于是他就全力研究. 他在比赛前 8 天时间里就解决了 800 年未解决的三次方程公式解的问题. 比赛是在1525年意大利威尼斯城举行. 比赛结果，塔尔塔里雅在两小时内解答了对方提出的 30 个问题而获得胜利，而佛罗雷都斯却不能回答塔尔塔里雅的问题而告失败. 不久以后，数学教授兼物理教授卡丹竭力要求塔尔塔里雅传授秘诀，并保证严守秘密. 塔尔塔里雅满足了卡丹的要求，但卡丹没有遵守诺言，20年后他在自己的《大法》一书里公开了不完全三次方程的公式解，因此该公式就被误称为卡丹公式.

在卡丹的仆人费拉里找到了四次方程公式解以后，人们竭

尽一切努力，试图寻找五次及五次以上的一般方程的公式解.也就是说，人们希望象解一、二、三、四次方程那样，通过对一般的五次方程的符号系数进行加、减、乘、除、乘方和正整数次方根等六种代数运算的某种组合，将五次方程的根明显地表达出来. 大约经过三个世纪的努力，还没看到丝毫成功的希望. 人们感到用公式解五次及五次以上的方程的道路十分诡秘，而这条诡秘的道路似乎在向人类的智慧挑战.

直至十九世纪二十年代，年仅22岁的挪威青年数学家阿贝尔(1802-1829)于1824年证明了一个使当时时代所有数学家感到十分震惊的事实：对于一般的具有符号系数的方程，如果它的次数大于等于5，那么任何一个由这些符号系数所组成的根式不可能是方程的根(当然，这不排斥某个具体方程可以用根式求解). 这样一来，事情的原委弄清楚了：原来三个世纪以来一切国家的数学家用根式去解一般的五次及五次以上的方程之所以不能成功，只是因为这个问题根本没有解，亦即通向一般五次及五次以上方程的公式解的道路是不存在的.

随后在三十年代，法国青年数学家伽罗华(1811-1832)用一种为当时数学家不能容忍的崭新的数学理论——群论，最终彻底地解决了方程能用根号解出的充分必要条件. 然而就当时来说，他提交法国科学院的两篇论文，不但未得到答复，反而被认为是一种混乱. 利用伽罗华理论，可以判断出象 $x^5-4x-2=0$ 这样一个具体五次方程，也不能给出它的公式解.

思考与练习

1. 试述未知数代换与配完全平方对于解四次方程的作用.
2. 解四次方程 $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.
3. 已知方程 $x^6+2x^5-2x^4-12x^3-17x^2-10x-2=0$ 有二重根

$x=-1$，求解这个方程.（提示：用 $(x+1)^2=x^2+2x+1$ 除方程左端得四次方程，然后求解.）

4.（1978年高考副卷试题）设有多项式

$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2$ （$p\neq0$），

求证：(1) 如果 $f(x)$ 的系数满足 $p^2-4q-4(m+1)=0$，那么 $f(x)$ 恰好是一个二次三项式的平方.

(2) 如果 $f(x)$ 与 $F(x)=(2x^2+ax+b)^2$ 表示同一个多项式，那么 $p^2-4q-4(m+1)=0$.

（提示：通过两次配方，可使

$$f(x)=[(2x^2-px)-(m+1)]^2-[p^2-4q-4(m+1)]x^2.)$$

§ 6　一些特殊高次方程的解法

由上面两节中看到，用三次、四次方程的公式解来求方程的根，需通过大量繁复冗长的计算，十分不便．对于三次方程有三个互异的实根情况，还需要借助复数进行计算．因此，对高次方程寻找特殊解法就显得十分必要．

当然需要指出，对于某一具体的高次方程不一定有特殊解法可找．其次，即使存在特殊解法，也不是一件轻而易举的事情．但是，特殊解法的寻找所需要熟练的技巧和一些非常规的想法，对于培养智力和提高数学素养是十分有益的．下面选入的一些例题，望读者用心领会，不断总结提高．

例 1　给出方程 $ax^{2n}+bx^n+c=0\ (a\neq 0)$ 的公式解．

解　进行未知数代换，令 $y=x^n$，则得辅助二次方程

$$ay^2+by+c=0,$$

解得

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

最后有

$$x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

在复数域中考虑时，上述最后的 n 次方根应有 n 个根．

例 2　解倒数方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$．

解　凡与首末两项一般远的两项（缺项的项当作系数为0的

项)，其系数都相等，这样的方程叫倒数方程.

用 x^2去除方程（因为对于倒数方程，$x=0$ 显然不会是它的根，所以用 x^2 去除不会有增根遗根），
于是得

$$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

这一方程之形式与倒数之命名十分相符：如果每个 x 代之以它的倒数$\frac{1}{x}$，方程仍然不变.于是，方程变为

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0,$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$，则有

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

于是有

$$2(y^2-2)+3y-16=0,$$

解得

$$y_1=-4,\quad y_2=\frac{5}{2}.$$

从而有

$$x+\frac{1}{x}=-4 \text{ 和 } x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

或

$$x^2+4x+1=0 \text{ 和 } 2x^2-5x+2=0.$$

最后求得

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3},\quad x_3=2,\quad x_4=\frac{1}{2}.$$

例 3 解方程 $x^5-5x^3+5x-1=0$.

解 通过分解因式求解.

$$x^5-5x^3+5x-1=(x^5-1)-(5x^3-5x)$$

$$=(x-1)[(x^4+x^3+x^2+x+1)-5x(x+1)]$$

$$=(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)\{[(4x^4+4x^3+x^2)$$

$$-6(2x^2+x)+9]-5(x^2+2x+1)\}$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)[(2x^2+x-3)^2-5(x+1)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)(2x^2+x-3+\sqrt{5}x+\sqrt{5})$$

$$(2x^2+x-3-\sqrt{5}x-\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)[2x^2+(1+\sqrt{5})x+(\sqrt{5}-3)]$$

$$[2x^2+(1-\sqrt{5})x-(\sqrt{5}+3)]=0.$$

于是得到方程的解是

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}),$$

$$x_{4,5}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}).$$

例 4 解方程 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$.

解 因为

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3(a+b)ab,$$

所以原方程变为

$$x^3-3abx+(a+b)^3-3(a+b)ab=0,$$

或

$$[x^3+(a+b)^3]-[3abx+3ab(a+b)]=0,$$

$$(x+a+b)[x^2-(a+b)x+(a+b)^2]-3ab(x+a+b)=0,$$

$$(x+a+b)[x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2]=0.$$

于是有

$$x_1=-(a+b),$$

$$x_{2,3}=\frac{1}{2}[a+b\pm i\sqrt{3}(a-b)].$$

例 5　解方程$(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$.

解　显然，$x=3$不是方程的根，所以可用$(x-3)^2$除于方程左端，得

$$x^2+\left(\frac{3x}{x-3}\right)^2=16.$$

将上述方程左端配方，得

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2=16+6\frac{x^2}{x-3},$$

或

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2=16+6\frac{x^2}{x-3}.$$

令　$$y=\frac{x^2}{x-3},$$

得　$$y^2-6y-16=0,$$

解得

$$y_1=-2,\qquad y_2=8.$$

再解分式方程

$$\frac{x^2}{x-3}=-2 \text{ 和 } \frac{x^2}{x-3}=8,$$

最后求得

$$x_{1,2}=2(2\pm i\sqrt{2}),\quad x_{3,4}=-1\pm\sqrt{7}.$$

例 6　若三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 有两个等根，试求方程的三个根.

解　设方程的两个等根是 α，另一根为 β，那么应有

$$\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r&=(x-\alpha)^2(x-\beta)\\&=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-\beta)\\&=x^3+(-2\alpha-\beta)x^2\\&\quad+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta.\end{aligned}$$

比较两端系数有

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-p, & (1)\\ \alpha^2+2\alpha\beta=q, & (2)\\ \alpha^2\beta=-r. & (3)\end{cases}$$

由(1)式解出 $\beta=-p-2\alpha$，代入(2)式得

$$3\alpha^2+2p\alpha+q=0.$$

由此方程解得

$$\alpha_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}$$

或　　$$\alpha_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-3q}}{3}.$$

将 α_1, α_2 代入原方程，取其中满足原方程的根，记为 α，那么 α 必为原方程的重根，于是由(3)式即得原方程第三个根为

$$\beta=\frac{-r}{\alpha^2}.$$

例如，已知 $x^3-6x^2+9x-4=0$ 有一重根，由上述求 α 的公式求得

$$\alpha_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-3q}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{3}$$

$$=3或1.$$

通过验证，$\alpha=1$ 为原方程的根，故 $\alpha=1$ 为原方程的重根，

第三根为即 $\beta=\frac{-r}{\alpha^2}=\frac{4}{1}=4$.

例 7 解方程 $x^4-2x^3+x-a=0$.

解 对于四次方程用下面的待定系数法分解因式是十分有效的，它具一般的意义.

$$x^4-2x^3+x-a=(x^2-x+A)(x^2-x+B).$$

比较两端系数，得方程组

$$A+B+1=0,\quad -A-B=1\quad AB=-a.$$

利用韦达定理可以看出 A,B 是下面二次方程

$$y^2+y-a=0$$

的根，于是求得

$$A=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a}),$$

$$B=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+4a}).$$

于是原方程同解于下面两个二次方程：

$$x^2-x+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a})=0,$$

$$x^2-x+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1-4a})=0.$$

解得

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3-2\sqrt{1+4a}}),$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{3+2\sqrt{1+4a}}\right).$$

例 8 解方程 $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$.

解 通过试探，可知 $x=1$, $x=-2$ 是方程的根，用 $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ 除 $x^4+2x^3+5x^2+4x-12$ 得商 x^2+x+6，于是原方程分解因式为

$$(x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0.$$

由此解得方程的根是

$$x_1=1,\quad x_2=-2,$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{23}).$$

例 9 解方程

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2$$
$$+2(5a+6)x+2a+a^2=0.$$

解 将方程看作参数 a 的方程，重新写为

$$a^2-2(x^2-5x-1)a+x^4$$
$$-10x^3+22x^2+12x=0.$$

解出 a，得

$$a=x^2-6x,$$

$$a=x^2-4x-2.$$

又由上述两个方程解得

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a},$$

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}.$$

例 10 解方程 $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$.

解 令 $\sqrt{3}=a$，将 a 看作参数，将原方程写为

$$xa^2+(2x^2+1)a+(x^3-1)=0.$$

解出a，得

$$a=\frac{-(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2x}。$$

于是由

$$2xa=-2x^2-1+2x+1,$$

或

$$2xa=-2x^2+2x,$$

约去x（显然$x=0$不是原方程的根），得到

$$a=1-x,$$

于是有

$$x_1=1-a=1-\sqrt{3}.$$

再由

$$2xa=-2x^2-1-2x-1,$$

或

$$x^2+(a+1)x+1=0,$$

解得

$$x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-a-1\pm\sqrt{(a+1)^2-4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}-1\pm\sqrt[4]{12}\right).$$

思 考 与 练 习

1. 高次方程的特殊解法的核心是，通过各种方式实行“降阶”，最后归结为二次或一次方程的求解．试总结一些“降阶”的方法．
2. 解方程$2x^4+x^2-1=0$.
3. 解分式方程$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}=0$.

4. 解无理方程 $x^3-11x^{\frac{3}{2}}+24=0$.

5. 解方程 $(x+a)(x+a+1)(x+a+2)(x+a+3)=6$.

(提示：将方程左端第一，四因子相乘，第二，三因子相乘，再考虑适当的未知数代换，化为二次方程.)

6. 解方程 $x^4-3x^3+5x^2-4x+2=0$.(提示：利用待定系数法将方程左端分解为两个二次三项式的乘积.)

7. 解方程 $x^3+6x^2+11x+12=0$.(提示：可通过试探找到一个根 $x=-4$.)

8. 解方程 $x^3+2\sqrt{2}x^2+2x+\sqrt{2}+1=0$.(提示：令 $\sqrt{2}=a$，先解 a 的二次方程.)

9. 解方程 $4x^4+2(x+1)^2-4x^2(x+1)=0$. (提示：将方程左端除以 $4x^2(x+1)$，并令 $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$.)

10. 已知方程 $12x^3+8x^2-x-1=0$ 有一个二重根，试解此方程.

§7 韦达定理与对称多项式

n次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0) \tag{1}$$

的左端是一个n次多项式:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{2}$$

因此n次方程的根也叫做相应的多项式的根或多项式的零点. "多项式的根"是代数的语言, "多项式的零点"是函数的语言. 今后我们视需要而使用这两个名词.

一、根与系数的关系——韦达定理

在二次方程中, 我们已经知道了联系根与系数的韦达定理. 上一节例6的解法中利用了三次方程的根与系数之关系. 这些事实启发我们去寻找n次方程的根与系数的关系, 即n次多项式根与系数的关系.

设上述n次多项式$f(x)$的n个根是x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 那么$f(x)$可分解因式如下:

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}\right)$$

$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

约去a_0, 并将上式右端乘积展开, 得

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}$$

$$
\begin{aligned}
&=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}\\
&\quad+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}\\
&\quad-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n\\
&\quad+\cdots+x_2x_3\cdots x_n)x+(-1)^n(x_1x_2\cdots x_n).
\end{aligned}
$$

比较上式两端的系数，就得到多项式根与系数的韦达定理：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{a_1}{a_0}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n),\\
&\frac{a_2}{a_0}=(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n),\\
&\frac{a_3}{a_0}=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots\\
&\qquad+x_{n-2}x_{n-1}x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{a_{n-1}}{a_0}=(-1)^{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots\\
&\qquad x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_n),\\
&\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}
\right.
\tag{3}
$$

为什么可以得到上述一系列等式，其道理可见§11习题8.

详细地说，如果将多项式各项除以首项系数a_0化为首项系数为1的形式，那么韦达定理告诉我们：

x^{n-1}的系数等于n个根之和的相反数$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；

x^{n-2}的系数等于n个根之所有两个根之乘积的和$(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$；

x^{n-3}的系数等于n个根之所有三个根之乘积的和的相反数$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$；

…………

x的系数等于n个根之所有$(n-1)$个根之乘积的和再乘

以 $(-1)^{n-1}$，即 $(-1)^{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+\cdots x_2x_3\cdots x_n)$;

常数项等于 n 个根之乘积再乘以 $(-1)^n$，即 $(-1)^n x_1x_2\cdots x_n)$.

例 1 设一个四次方程的根是 1,2,3,4，求这个四次方程.

解 因为

$$x_1+\cdots+x_4=1+2+3+4=10,$$
$$x_1x_2+\cdots+x_3x_4=2+3+4+6+8+12=35,$$
$$x_1x_2x_3+\cdots+x_2x_3x_4=6+12+8+24=50,$$
$$x_1x_2x_3x_4=50.$$

所以由韦达定理求得相应的四次方程是

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+50=0.$$

例 2 已知方程 $x^3-6x^2+9x+k=0$ 的三个根成等差数列，求 k 值并解这个方程.

解 设三个根是 $a-d$, a, $a+d$. 于是由韦达定理这三个根满足下列方程组

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=6, & ① \\ (a-d)a+(a-d)(a+d)+a(a+d)=9, & ② \\ (a-d)a(a+d)=-k. & ③\end{cases}$$

由①解得 $a=2$，代入②解得 $d=\pm\sqrt{3}$，方程的三个根是 $2-\sqrt{3}$，2，$2+\sqrt{3}$，由此求得 $k=-2$.

例 3 （1965 年全国高考试题）已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根 α,β,γ 都是实数. 证明 α, β, γ 是一个三角形三条边长的充分与必要条件是:

$$\begin{cases}p<0,\ q>0,\ r<0, \\ p^3>4pq-8r.\end{cases}$$

证 必要性.

显然，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，于是

$$-(\alpha+\beta+\gamma)=p<0,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q>0,$$
$$-(\alpha\beta\gamma)=r<0$$

又因α,β,γ构成三角形之边长，所以由“三角形两边之和大于第三边”得

$$\alpha+\beta-\gamma>0,\ \alpha-\beta+\gamma>0,$$
$$-\alpha+\beta+\gamma>0.$$

于是

$$\begin{aligned}p^3-4pq+8r&=-(\alpha+\beta+\gamma)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)\\&\quad(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\alpha\beta\gamma\\&=-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3-2\alpha\beta\gamma+\alpha\beta^2\\&\quad+\alpha\gamma^2+\alpha^2\beta+\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma\\&=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)\\&\quad(-\alpha+\beta+\gamma)>0,\end{aligned}$$

亦即

$$p^3>4pq-8r.$$

充分性.

由 $p<0$，$q>0$，$r>0$ 可知

$$\alpha+\beta+\gamma>0,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma>0,$$
$$\alpha\beta\gamma>0.$$

由此可以证明$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$. 事实上如果α,β,γ中只有一个为负，那么不能保证$\alpha\beta\gamma>0$；如果α,β,γ都为负，也不能保证$\alpha\beta\gamma>0$，如果其中有二个为负，不妨设$\alpha>0$，$\beta<0$，$\gamma<0$，那么由$\alpha+\beta+\gamma>0$，得到$\alpha+\beta>-\gamma>0$，这又导致

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)<0.$$

因此必须有 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$.

由 $p^3>4pq-8r$ 得

$$p^3-4pq+8r=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)>0.$$

于是至少有一个因式大于0，不妨设 $\alpha+\beta-\gamma>0$，而 $(\alpha-\beta+\gamma)$ 与 $(-\alpha+\beta+\gamma)$ 同号.

如果 $\alpha-\beta+\gamma>0$，$-\alpha+\beta+\gamma>0$，则立即得到

$$\alpha+\beta>\gamma,\quad \beta+\gamma>\alpha,\quad \alpha+\gamma>\beta,$$

问题得证.

如果 $\alpha-\beta+\gamma<0$，$-\alpha+\beta+\gamma<0$，那么将此两不等式相加，得 $2\gamma<0$，$\gamma<0$，这与 $\gamma>0$ 矛盾.

同样可讨论先假设 $\alpha-\beta+\gamma>0$ 或 $-\alpha+\beta+\gamma>0$ 的情形.

因此，α,β,γ 可构成三角形的三条边长.

二、基本对称多项式

韦达定理是多项式系数与根之间的一条强有力的纽带，这种深刻的联系还可以进一步阐发.

韦达定理告诉我们，首项系数为1的多项式的系数，无非是多项式根的一些组合．这些组合有一个重要特点，这就是这些根在组合的式子里具有对称的形式，即任意交换两个根的位置不会使式子有所改变（读者可自行验证)．我们把这些组合的式子叫做基本对称多项式，亦即称以下一些 n 元多项式 σ_1，σ_2……，σ_n 为基本对称多项式.

$$\begin{cases}\sigma_1=\sigma_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ \quad =x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=\sigma_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ \quad =x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_3=\sigma_3(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\ \quad =x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n, \quad (4) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{n-1}=\sigma_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\ \quad =x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+ \\ \quad\quad \cdots+x_2x_3\cdots x_n, \\ \sigma_n=\sigma_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=x_1x_2\cdots x_n. \end{cases}$$

在作了上述规定后，我们就可以说，如果不计正负号，那么首项系数为 1 的多项式，它的系数是它的根的基本对称多项式．如果考虑正负号，那么有

$$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n, \qquad (5)$$

其中 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n$ 就是 $f(x)$ 的根的基本对称多项式．

三、对称多项式

设 n 元多项式 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，如果任意改换自变量的位置而不会改变该多项式，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}),$$

其中 $x_{i_1},\ x_{i_2},\ \cdots,x_{i_n}$ 是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的任意一个重新排列，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为对称多项式．上面讲的基本对称多项式无非是对称多项式的特殊情形．

在高等代数里可以证明：任何一个 n 元对称多项式都可以表示成这 n 个元的基本对称多项式的整代数式．

比如我们在 § 3 的例中已经遇到过二元对称多项式化为基本对称多项式的整代数式，这就是

$$f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$f(\alpha,\beta)=\alpha^2\beta^2=\sigma_2^2,$$

$$f(\alpha,\beta)=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$
$$f(\alpha,\beta)=\alpha^3\beta^3=\sigma_2^3.$$

在这一节的例 3 中我们也遇到了三元对称多项式化成基本对称多项式的整代数式，这就是

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=-(\alpha+\beta+\gamma)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\alpha\beta\gamma$$
$$=-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3.$$

下面我们通过实例，介绍用基本对称多项式表达对称多项式的一般方法.

比如我们讨论对称多项式

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3.$$

在用基本对称多项式表达 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 时，肯定需要包含项 $(x_1+x_2+x_3+x_4)^3=\sigma_1^3$. 但是这样一来，又多出 $x_i^2x_j$ 和 $x_ix_jx_k$ 的一些项，于是应该减去这些项. 如果减去若干个比如设 A 个

$$(x_1+\cdots+x_4)(x_1x_2+\cdots+x_3x_4)=\sigma_1\sigma_2,$$

那么 $x_i^2x_j$ 可以被消除，但是 $x_ix_jx_k$ 的项不见得都能除去，故又要减若干个比如设 B 个

$$x_1x_2x_3+\cdots+x_2x_3x_4=\sigma_3.$$

这样我们得到

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3,$$

其中 A, B 是待定的系数. 为了决定系数 A, B, 令 $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=0$, 于是上式两端变为

$$1+1+0+0=(1+1)^3+A(1+1)(1\cdot1),$$

$$2=8+2A,\qquad A=-3.$$

再令 $x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=0$，得 $B=3$。

最后得到

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

从这个例题中看到，如果把 x_1^3 写成

$$x_1^3=x_1^3x_2^0x_3^0x_4^0,$$

再递降 x_1 上的指数 3 直到 1 为止，分配给 x_2，x_3 甚至 x_4，但要求指数之和仍为 3，写出这些项：

$$x_1^2x_2^1x_3^0x_4^0,\qquad x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0,$$

依次记下它们的指数的数列：

$$3000,\qquad 2100,\qquad 1110,$$

那么根据这些指数作基本对称多项式如下：

$$\sigma_1^{3-0}=\sigma_1^3,\qquad \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}=\sigma_1\sigma_2,$$

$$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=\sigma_3,$$

然后令 $$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3$$

即可．此方法具有一般意义．

例 4 试求多项式 $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ 的根的立方和．

解 设 $f(x)$ 的根为 x_1，x_2，x_3，x_4，它们立方之和为 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$，于是由上述结果再利用韦达定理，得

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3&=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\\&=(-1)^3-3\cdot(-1)\\&\quad\cdot 2+3\cdot(-1)=2.\end{aligned}$$

由此看到，不用求方程的根就解答了问题．$f(x)$ 的四个根是 $i,-i,\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$，也可验证上述结果的正确性．显然，通过求根的道路来解答此题的道路是十分艰难的．

例 5 将对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$ 表示为基本对称多项式的整代数式。

解 将 $x_1^2x_2^2$ 写成 $x_1^2x_2^2x_3^0x_4^0$，然后逐次获得数列

$$2200, \qquad 2110, \qquad 1111,$$

相应地有 $\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}$, $\quad \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}$,

$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}$,

或 σ_2^2, $\quad \sigma_1\sigma_3$, $\quad \sigma_4$,

于是 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4$.

由 $f(1,1,1,0)=3=9+A\cdot 3\cdot 1+B\cdot 0$,

得 $A=-2$，以及由

$$f(1,1,1,1)=6=36-2\cdot 4\cdot 4+B\cdot 1,$$

得 $B=2$，最后有

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

思 考 与 练 习

1. 设具有符号系数的五次方程 $x^5-a_1x^4+a_2x^3-a_3x^2+a_4x-a_5=0$，再设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是它的根，由韦达定理知

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a_1, \\ x_1x_2+\cdots+x_4x_5=a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2x_3x_4x_5=a_5. \end{cases}$$

试问：是否能从上面的方程组解出 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

2. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+x^2-2x+3=0$ 的根，试组成以 $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_3x_1$, $y_3=x_1x_2$ 为根的新的方程.

3. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+x^2+1=0$ 的根，试建立根是 $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_3+x_1$, $y_3=x_1+x_2$ 的新方程.

4. 已知方程 $2x^3-6x+8=0$ 的三个根是 α, β, γ，求下列各式的值：

(1) $(\alpha+\beta+\gamma)^2$;　　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$;

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$; (4) $\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2$.

5. 求方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根成等比数列的条件.(所求的条件是 $q^3=p^3r$)

6. 用基本对称多项式 σ_1, σ_2, σ_3 表示下列对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$.

§ 8　多项式的可除性

n 次代数方程解的问题，即是 n 次多项式的根或零点问题，因此，代数方程论的研究很自然地归结为对多项式的研究．

多项式的研究可以有两个方向．一个方向是纯代数的方向，它研究最一般形式的多项式，即在一般的具有运算结构的集合上讨论多项式；另一个是函数论的方向，它研究具体的数域上的多项式，常利用实数域、复数域的具体结构及多项式的连续性，获得多项式的各种特性以及多项式零点的分布规律．

从这一节开始，我们就上述两个方向作一些最初步的综合性的介绍．当然，我们只能都在数域上讨论，其中凡是对多项式实施代数运算的讨论，一般来说都可以推广到一般的集合上，凡是利用了实数、复数的连续性和多项式的连续性的，都属于函数论方面的讨论．所谓"连续性"，其严格的数学涵义我们固然不能涉及，但是我们可以在直观上获得深信：实数连续不断地分布在实轴上，复数连续不断地填满数平面，实变数多项式的图象是连续不断的曲线，如此等等．

我们先讨论多项式的一些代数运算性质．在以下各节讨论中，我们总假定多项式的系数取自某一数域，即在某个数域上讨论多项式．

多项式也叫整式，这就容易使我们联想起整数．这种联想是十分自然的，整数的一些性质确实能"移植"到多项式上来．我们引入整系数多项式一个形式上的转换作为引子．

比如以数字1985来说，它可写成

$$1985 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5,$$

令$10 = x$，那么得

$$x^3 + 9x^2 + 8x + 5,$$

这样就实现了整数到整式的形式转化．反之，若令$x = 10$，那么又从整式转化为整数．由此可见，整数的各位数字与整式各次幂的系数具有十分相似的地位，这就是这两种理论有许多相似之处的原因．

在整数理论中，有

被除数＝除数·商数＋余数；

在整式（多项式）理论中，类似地有

被除式＝除式·商式＋余式．

设被除式$f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 5$，除式$g(x) = x^2 + 1$，我们可以象数那样做除法（称为长除法）：

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 4 \ (\text{商式}) \\
\hline
x^2+1 & x^3 + 4x^2 - 6x + 5 \\
 & x^3 \qquad\quad + x \\
\hline
 & \qquad 4x^2 - 7x + 5 \\
 & \qquad 4x^2 \qquad\ + 4 \\
\hline
 & \qquad\qquad -7x + 1 \\
 & \qquad\qquad (\text{余式})
\end{array}$$

不过我们以后常采用如下书写格式：

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 4x^2 - 6x + 5 & x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
x^3 \qquad\quad + x & x + 4 \\
\hline
4x^2 - 7x + 5 & (\text{商式}) \\
4x^2 \qquad\ + 4 & \\
\hline
-7x + 1 & \\
(\text{余式}) &
\end{array}$$

因此得到

$$x^3 + 4x^2 - 6x + 5 = (x^2 + 1)(x + 4) + (-7x + 1).$$

于是有关系式

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中

商式　$q(x)=x+4$,　余式　$r(x)=-7x+1$.

显然，如果将上述除法运算做到底，那么必定可使余式 $r(x)$的次数小于除式 $g(x)$的次数.

再设 $f(x)=3x^6-5x^5+3x^2-2$, $g(x)=x^3-2x^2+1$, 我们用 $g(x)$除 $f(x)$ 如下（在缺项处空一位）：

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
3x^6 & -5x^5 & & & +3x^2 & & -2 & x^3-2x^2+1 \\
3x^6 & -6x^5 & & +3x^3 & & & & \overline{3x^3+x^2+2x+1} \\
\hline
 & x^5 & & -3x^3 & +3x^2 & & -2 & \text{（商式）} \\
 & x^5 & -2x^4 & & +x^2 & & & \\
\cline{2-7}
 & & 2x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & -2 & \\
 & & 2x^4 & -4x^3 & & +2x & & \\
\cline{3-7}
 & & & x^3 & +2x^2 & -2x & -2 & \\
 & & & x^3 & -2x^2 & & +1 & \\
\cline{4-7}
 & & & & 4x^2 & -2x & -3 & \\
 & & & & & \text{（余式）} & &
\end{array}$$

于是我们得到

商式　$q(x)=3x^3+x^2+2x+1$,

余式　$r(x)=4x^2-2x+3$.

一般地说，我们可以深信下面的重要结论（证明从略）.

定理　对于某个数域上的两多项式 $f(x)$与$g(x)\neq 0$, 一定存在唯一的两个多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$, 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \qquad (1)$$

当 $g(x)$ 为非零次多项式时，$r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数.

上述定理是多项式整除性理论的基础．由这个定理可以推出以下一些定理.

余数定理 以 $x-c$（c 为常数）除多项式 $f(x)$ 所得到的余数等于 $f(c)$.

证明 设 $f(x)$ 为被除式，$g(x)=x-c$ 是除式，因此存在 $q(x)$ 和 $r(x)$，使

$$f(x)=(x-c)q(x)+r(x).$$

由于 $r(x)$ 的次数小于 $(x-c)$ 的次数，所以 $r(x)$ 是零次多项式，即 $r(x)$ 为常数 r. 将 $x=c$ 代入，得

$$f(c)=r,$$

亦即 $r=f(c)$.

这样，要计算 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的值 $f(c)$，也可以计算 $f(x)$ 除以 $(x-c)$ 所得的余数.

下面的综合除法是计算余数的简捷办法，从而也是简捷计算函数值 $f(c)$ 的方法.

例如，已知 $f(x)=x^4+x^3-5x^2-3x+4$，
我们用综合除法求 $f(2)$.

先将多项式 $f(x)$ 的系数（按降幂次序）写出，如遇缺项可添写 0，然后用符号"L"隔开，写上 2：

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 1 & -5 & -3 & 4 & \underline{|2} \end{array}$$

将首项系数 1 移至横线下：

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 1 & -5 & -3 & 4 & \underline{|2} \\ \hline 1 & & & & & \end{array}$$

再将 1 乘以 2 之积 2 写在横线上的第二个位置上，相加得 3：

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 1 & -5 & -3 & 4 & \underline{|2} \\ & 2 & 6 & & & \\ \hline 1 & 3 & 1 & & & \end{array}$$

再将 3 乘以 2 之积 6 写在横线上的第三个位置上，相加得 1. 依此类推，有

1	1	−5	−3	4	|2
	2	6	2	−2	
1	3	1	−1	2 ←余数	

最后得到的数 2 就是余数，故有 $f(2)=2$（可直接验证确实是 $f(2)=2$）.

将 $x^4+x^3-5x^2-3x-4$ 除以 $x-2$ 的普通除法式子写出，仔细与上述方法加以对照，就会发现上述综合除法求余数的正确性(其严格证明——练习10留给读者).

例 用综合除法求 $f(x)=-2x^5+2x^3+4x-3$ 在 $x=-3$ 时的函数值 $f(-3)$，并求 $(x+3)$ 除 $f(x)$ 的商式部分.

解 利用综合除法，算得下表：

−2	0	2	0	4	−3	|−3
	6	−18	48	−144	420	
−2	6	−16	48	−140	417 ←余数	

于是有

$$-2x^5+2x^3+4x-3$$
$$=(-2x^4+6x^3-16x^2+48x-140)(x+3)+417,$$

求得

$$f(-3)=417,$$

商式部分 $=-2x^4+6x^3-16x^2+48x-140$.

利用余数定理可以获得下述结果.

因式定理 *多项式 $f(x)$ 在并且只在 $f(c)=0$ 时，含有因式 $(x-c)$.*

证明 因为

$$f(x)=(x-c)q(x)+f(c),$$

所以由 $f(c)=0$ 得 $f(x)$ 含有因式 $(x-c)$；由 $f(x)$ 含有因式 $(x-c)$，必然要求 $f(c)$ 被 $(x-c)$ 除尽（因为第一项 $(x-c)q(x)$ 可被 $(x-c)$ 整除），这就只有 $f(c)=0$ 不可.

重复运用这个定理，可以得到下列推论、

推论 如果数 x_1, $x_2,\cdots,x_k$ 两两不等，那么多项式 $f(x)$ 在并且只在

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_k)=0$$

时，含有因式

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k).$$

由此推论容易推出，当 $f(x)$ 为 n 次多项式且它的 n 个根两两不同时，$f(x)$ 可表示为因式之积的形式：

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

其中 a_0 是 $f(x)$ 的首项系数。

我们在建立根与系数的韦达定理时，已利用了上述事实（当然还不够，还未涉及有重根的情形），在那时我们悄悄地回避了这一事实的证明，采取了默认的态度，到 §11的代数基本定理建立了以后这一事实将得到最后的证明.

定义 对于数域上的多项式 $f(x)$, $g(x)$, 如果存在一个多项式 $h(x)$ 满足

$$f(x)=g(x)h(x), \tag{2}$$

那么我们就说多项式 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除，$g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因式（或因子）。

容易证明，多项式 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除的充分必要条件是 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的余式等于零.这只要注意到带余式除法

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

这一事实即可.

多项式的可除性性质和整数的可除性性质极为类似，我们开列于下：

1) 设$f(x)$可被$g(x)$整除，$g(x)$可被$h(x)$整除，则$f(x)$可被$h(x)$整除.

2) 设$f(x)$和$g(x)$可以被$h(x)$整数，则$f(x)\pm g(x)$也可以被$h(x)$整除.

3) 若多项式$f(x)$和$g(x)$中至少有一个被$h(x)$整除，则乘积$f(x)g(x)$可被$h(x)$整除.

4) 若多项式$f(x)$和$g(x)$可以相互整除，则$f(x)$和$g(x)$仅相差一常数因子.

5) 若$f(x)$可被$\varphi(x)$整除，那么对任意的a和$b(b\neq 0)$，$af(x)$仍可被$b\varphi(x)$整除.

思考与练习

1. 如果你在做多项式除法时，不写出x的各次幂而只写出它们的系数（缺项的系数为零），那么你会发现，多项式的除法居然和整数的除法有类似之处. 试选几个整数系数多项式进行练习，以证实上述事实的正确性.
2. 试求$x^4+3x^3+6x^2-x-1$除以$x-1$的余式.
3. 试求$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$除以$(x+1)(x+2)$的余式.
4. 不做除法，证明$2y^3-y^2-15y+18$能被y^2+y-6除尽.
5. 证明a^n-1能被$a-1$整除，并求商式.
6. 用综合除法求$f(2)$，而$f(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$.
7. 用综合除法求$f(-2)$，而$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$.
8. 证明方程$x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$有两根$2,-3$，并求其他两根.
9. 试决定A与B使Ax^4+Bx^3+1能被$(x-1)^2$除尽.

10. 如果

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})+r,$$

那么有 $b_0=a_0, b_1=a_1+\alpha b_0, \cdots, b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}, r=a_n+\alpha b_{n-1}$，由此给出综合除法的理论根据。

§9　最高公因式

在整数理论中有约数、公约数、最大公约数以及互质等概念，与此相类似的在多项式理论中有因式、公因式、最大公因式以及两多项式互质等概念．上一节我们已建立了类似于约数的因式概念．

定义　若 $h(x)$ 是两个多项式 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的因式，则 $h(x)$ 叫做 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式（或公因子）．若 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式，而且能被它们的任一公因式所整除，则 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式（或最高公因子）．

我们可以利用所谓辗转相除法求两个多项式的最高公因式．为了计算简便，常对各次余式乘以常数．这固然影响了商式，但是对于我们需要的余式来说无非相差一常数因子，所以并不影响最高公因式的获得（仅相差一常数因子）．

我们以具体例子来阐明求最高公因式的辗转相除法．

设多项式 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$, $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，我们求 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式．

为避免分数出现，用 $g(x)$ 除 $3f(x)$．

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \hline
\underline{3x^4+10x^3+2x^2-3x\quad} & x \\
-x^3-5x^2-9x-9 & \\
(\text{乘以}-3) & \\
3x^3+15x^2+27x+27 & 1 \\
\underline{3x^3+10x^2+2x-3} & \\
5x^2+25x+30 & \\
(\text{除以}\ 5) & \\
x^2+5x+6 &
\end{array}
$$

（第一次余式 $r_1'(x)$）

求得了次数低于 $g(x)$ 的第一次余式 $r_1'(x)$ 后（由于我们乘以常数的关系，该余式与真正余式有所区别，故用 $r_1'(x)$ 记之，以示与真正余式 $r_1(x)$ 之区别）。作除式地位的 $g(x)$ 辗转而为被除式，而 $r_1'(x)$ 作新的除式，继续除之：

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\
\underline{3x^3+15x^2+18x} & 3x \\
-5x^2-16x-3 & -5 \\
\underline{-5x^2-25x-30} & \\
9x+27 & \\
\underline{(\text{除以 } 9)} & \\
x+3 &
\end{array}
$$

（第二次余式 $r_2'(x)$）

再将余式 $r_1'(x)$ 辗转为被除式，用第二次余式 $r_2'(x)$ 除之，恰好除尽：

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+5x+6 & x+3 \\
\underline{x^2+3x} & x \\
2x+6 & 2 \\
\underline{2x+6} & \\
0 &
\end{array}
$$

我们说 $r_2'(x)=x+3$ 就是 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式，其理由如下.

如果假定我们在辗转相除时不采用乘以常数的做法而得到以下各式：

$$
\begin{cases}
f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x), & ① \\
g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x), & ② \\
r_1(x)=r_2(x)q_3(x), & ③
\end{cases}
$$

那么由③式知道 $r_2(x)$ 是 $r_1(x)$ 的因式，又从②式知道 $r_2(x)$ 是 $g(x)$ 的因式，再从①式知道 $r_2(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，因此，

$r_2(x)$就是$f(x)$，$g(x)$的公因式.

如果还有公因式$h(x)$整除$f(x)$，$g(x)$，那么由①式知道$h(x)$必整除$r_1(x)$，又由②式知道$h(x)$必整除$r_2(x)$. 于是，凡整除$f(x)$，$g(x)$的因式一定整除$r_2(x)$，这表明$r_2(x)$是最高公因式.

$r_2(x)$与前面的$r_2'(x)$仅相差一常数，所以$r_2'(x)=x+3$也是$f(x)$，$g(x)$的最高公因式.

在辗转相除时，只需涉及各项的系数，而写下形如x^k的文字纯系多余，另外用数的除法格式书写也有重复占位置多的缺点，因此我们改写辗转相除的书写格式如下，叫做分离系数除法. 读者可仔细加以对照、领会.

乘以3	1	3	−1	−4	−3	3	10	2	−3	3
1	3	9	−3	−12	−9	3	15	18		
	3	10	2	−3			−5	−16	−3	−5
乘以−3		−1	−5	−9	−9		−5	−25	−30	
1		3	15	27	27			9	27	除以9
		3	10	2	−3			1	3	第二次余式
除以5			5	25	30					
第一次余式			1	5	6					
1			1	3						
2				2	6					
				2	6					
除尽					0					

由分离系数除法得到$f(x)$，$g(x)$的最高公因式是$x+3$

例 1　求下列两多项式的最高公因式：

$$f(x)=x^5-x^2-x+1,$$

$$g(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3.$$

解 在缺项处补上零系数(由于版印关系，我们将上面分离系数除法的表改写成上下两表).

1	1	0	0	−1	−1	1
	1	−2	−4	2	3	
2		2	4	−3	−4	1
		2	−4	−8	4	6
第一次余式			8	5	−8	−5
8			8	0	−8	
5				5	0	−5
				5	0	−5
除尽						0

乘以 8	1	−2	−4	2	3
1	8	−16	−32	16	24
	8	5	−8	−5	
$\frac{-21}{8}$		−21	−24	21	24
		−21	$-\frac{5\cdot 21}{8}$	21	$\frac{5\cdot 21}{8}$
除以$-\frac{87}{8}$			$-\frac{87}{8}$	0	$\frac{87}{8}$
第二次余式			1	0	−1

由最后一次(第二次)余式(用波浪线标出)可知，$f(x)$，$g(x)$的最高公因式是 x^2-1.

例 2 求下列两多项式的最高公因式：

$$f(x)=x^4+x^3+x^2-x-2,$$

$$g(x)=2x^3+(2+i)x^2+(-1+i)x-1.$$

解

乘以 2	1	1	1	-1	-2
1	2	2	2	-2	-4
	2	$(2+i)$	$(-1+i)$	-1	
$-\frac{i}{2}$		$-i$	$(3-i)$	-1	-4
		$-i$	$\left(\frac{1}{2}-i\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$	$\frac{i}{2}$
乘以 2			$\frac{5}{2}-$	$\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)-$	$\left(4+\frac{i}{2}\right)$
第一余式			$5-$	$(3+i)$	$-(8+i)$

乘以 5	2	$(2+i)$	$(-1+i)$	-1
2	10	$(10+5i)$	$(-5+5i)$	-5
	10	$-(6+2i)$	$-(16+2i)$	
$\frac{16}{5}+\frac{7}{5}i$		$(16+7i)$	$(11+7i)$	-5
		$(16+7i)-$	$\frac{1}{5}(41+37i)-$	$\frac{1}{5}(121+72i)$
除以 $\frac{1}{5}(96+72i)$			$\frac{1}{5}(96+72i)$	$\frac{1}{5}(96+72i)$
第二余式			1	1

由最后的余式（用波浪线标出）可知 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式是 $x+1$.

当 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式是常数的情形，那么 $f(x)$, $g(x)$ 实际上并不含有真正的（非零次）公因式. 这一情况无疑需要加以特别讨论.

定义 *若多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式是常数，那么我们说 $f(x)$, $g(x)$ 互质.*

两多项式的互质类同于两个整数的互质. 在整数理论中有

这样一条性质：两整数 m, n 互质的充要条件是，存在一对整数 k, l，使

$$km+ln=1.$$

类似于这种整数互质的特征性质，我们有

定理 1 多项式 $f(x)$，$g(x)$ 互质的充分必要条件是，存在一对多项式 $k(x)$，$l(x)$，使

$$k(x)f(x)+l(x)g(x)=1. \qquad (1)$$

证明 充分性.

如果 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式，那么由 (1)式，$d(x)$ 也是 (1) 式右端 1 的因式. 于是只能有 $d(x)=1$. 这就是说 $f(x)$，$g(x)$ 互质.

必要性.

为使叙述简便起见，我们假定 $f(x)$，$g(x)$ 的辗转相除至第三余式时，已经获得最高公因式是不等于 0 的常数 c，即有

$$\begin{cases} f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x), & (1) \\ g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x), & (2) \\ r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+c. & (3) \end{cases}$$

从 (1) 解出

$$r_1(x)=f(x)-g(x)q_1(x), \qquad (4)$$

代入 (2) 再解出 $r_2(x)$，得

$$\begin{aligned} r_2(x)&=g(x)-r_1(x)q_2(x) \\ &=g(x)-[f(x)-g(x)q_1(x)]q_2(x) \\ &=-q_2(x)f(x) \\ &\quad+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x), \end{aligned} \qquad (5)$$

将 (4)(5) 代入 (3)，解得

$$\begin{aligned} c&=r_1(x)-r_2(x)q_3(x) \\ &=f(x)-g(x)q_1(x)+q_2(x)q_3(x)f(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-[q_3(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)]g(x)\\
=&[1+q_2(x)q_3(x)]f(x)+[-q_1(x)\\
&-q_3(x)-q_1(x)q_2(x)q_3(x)]g(x); \qquad (6)
\end{aligned}
$$

令
$$k(x)=\frac{1}{c}[1+q_2(x)q_3(x)],$$

$$l(x)=\frac{1}{c}[-q_1(x)-q_3(x)-q_1(x)q_2(x)q_3(x)],$$

(6) 式就变为

$$k(x)f(x)+l(x)g(x)=1.$$

这就是我们要证明的.

用完全类似的方法可以证得下面更一般的事实(它们在整数理论中都有相应的命题).

定理 2 *若多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式是 $d(x)$, 则存在一对多项式 $k(x)$, $l(x)$, 使*

$$k(x)f(x)+l(x)g(x)=d(x). \qquad (2)$$

定理 3 *若多项式 $f(x)$, $g(x)$ 都与多项式 $h(x)$ 互质, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 亦与 $h(x)$ 互质.*

证明 因为 $f(x)$ 与 $h(x)$ 互质, 所以有 $k(x)$, $l(x)$, 使

$$k(x)f(x)+l(x)h(x)=1.$$

以 $g(x)$ 乘上式两端, 得

$$k(x)f(x)g(x)+g(x)l(x)h(x)=g(x).$$

如果 $f(x)g(x)$ 与 $h(x)$ 有非常数公因式 $d(x)$, 那么上式的右端 $g(x)$ 也含有因式 $d(x)$, 于是 $g(x)$ 就和 $h(x)$ 不互质了, 这与已知条件矛盾, 所以 $f(x)g(x)$ 必与 $h(x)$ 互质.

定理 4 *设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 为多项式. 若 $h(x)$ 整除 $f(x)\cdot g(x)$, 而 $h(x)$ 与 $f(x)$ 互质, 则 $h(x)$ 一定整除 $g(x)$.*

证明 因为 $h(x)$ 与 $f(x)$ 互质, 所以有

$$k(x)f(x)+l(x)h(x)=1,$$

两端乘以 $g(x)$，有

$$k(x)f(x)g(x)+g(x)l(x)h(x)=g(x).$$

因为上式左端第一项含因式 $f(x)\cdot g(x)$，能被 $h(x)$ 整数，左端第二项含有 $h(x)$ 自身，所以上式右端 $g(x)$ 能被 $h(x)$ 整除.

思考与练习

1. 试比较两整数的辗转相除与多项式的辗转相除及最大公约数与最高公因式的异同.
2. 求多项式 $f(x)=2(x-1)^2(x-2)$ 与 $g(x)=3(x-1)(x-2)$ 的最高公因式.
3. 求多项式 $f(x)=x^3-x$ 与 $g(x)=x^6-1$ 的最高公因式.
4. 求多项式 $f(x)=x^5-x^2-x+1$ 与 $g(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$ 的最高公因式.
5. 证明多项式 $f(x)=x^4+1$ 与 $g(x)=x^3-1$ 互质，并求 $k(x)$，$l(x)$，使 $k(x)f(x)+l(x)g(x)=1$.
6. 设多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式为 $d(x)$，仿照定理 1 那样的证明，证明必有 $k(x)$ 和 $l(x)$，使 $k(x)f(x)+l(x)g(x)=d(x)$.

§10 多项式的因式分解

合数与质数，这是大家熟知的概念．在多项式里相当于合数与质数的就是可约与不可约多项式．

定义 设 $f(x)$ 是某个数域上的非零次多项式，如果它能分解为同一数域上的两个次数较低的非零次多项式乘积，那么我们就把 $f(x)$ 叫做该数域上的可约多项式．否则，如果 $f(x)$ 不能分解为这样的乘积，那么 $f(x)$ 就叫做该数域上的不可约多项式．

根据定义，作为零次多项式的常数其地位和数 1 在整数里的地位一样，既不能说它们是可约的，又不能说它们是不可约的．

多项式的可约、不可约与整数论里的合数、质数有不类似的地方．多项式的可约与不可约完全依赖于多项式系数在什么数集或数域里取值，亦即依赖于多项式是在什么数集或数域上讨论的．

例如 x^2-2，它在有理数域里不能再被分解了，然而扩大数域至实数域，那么在实数域上有

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}),$$

所以 x^2-2 在有理数域上是不可约多项式，在实数域上就是可约多项式了．

再如 x^2+2，它在实数域上也是不可约多项式．但是将数域扩大到复数域上再进行讨论，就有

$$x^2+2=(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2}),$$

所以 x^2+2 是复数域上的可约多项式．

因此，“可约”与“不可约”是一个相对概念，相对于我们所讨论的数域. 这样一来，多项式的因式分解也就依赖于所选用的数域.

对于多项式 x^4-4，在有理数域上分解为

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2),$$

在实数域上分解为

$$x^4-4=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}),$$

在复数域上分解为最彻底的形式：

$$x^4-4=(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

今后如不特殊声明，凡提到不可约多项式，总是指在某固定数域上为不可约. 不可约多项式有以下重要性质.

定理 1 一次多项式总是不可约的.

证明 次数低于 1 的多项式，只能是零次多项式，即常数，而零次多项式乘零次多项式仍为零次多项式，不能得出一次多项式来，故一次多项式总是不可约的.

定理 2 若不可约多项式 $p_1(x)$ 可被另一多项式 $p_2(x)$ 整除，那么 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 只能相差一个常数因子.

证明 因为 $p_2(x)$ 整除 $p_1(x)$，所以有多项式 $q(x)$，使

$$p_1(x)=p_2(x)q(x).$$

然而由于 $p_1(x)$ 不可约，所以 $q(x)\equiv$常数 c，即有

$$p_1(x)=cp_2(x).$$

定理 3 设 $f(x)$ 是多项式，$p(x)$ 是不可约多项式，那么或者 $p(x)$ 整除 $f(x)$，或者 $p(x)$ 与 $f(x)$ 互质.

证明 不可约多项式 $p(x)$ 的因子只可能是某常数 c，或 $cp(x)$. 因此，$f(x)$ 和 $p(x)$ 的最高公因式也只可能有两种情况：常数 c 或 $cp(x)$.

若 $f(x)$, $p(x)$ 的最高公因式为常数 c，那么 $f(x)$ 与 $p(x)$ 互质；

若 $f(x)$, $p(x)$ 的最高公因式为 $cp(x)$，那么 $f(x)$被 $p(x)$ 整除.

定理 4 若两多项式的乘积 $f(x)g(x)$ 被不可约多项式 $p(x)$ 所整除，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中至少有一个被 $p(x)$ 整除.

证明 如果 $f(x)$ 不能被 $p(x)$ 整除，则由 $p(x)$ 的不可约性，知道 $f(x)$ 与 $p(x)$ 互质. 这时 $g(x)$ 必然被 $p(x)$ 整除，否则 $p(x)$ 不能整除 $f(x)\cdot g(x)$，这与条件相矛盾.

在整数理论里，一个整数可分解为若干个质数因子的乘积；在多项式理论里我们也有类似的结果，这就是下面的多项式因式分解唯一性定理.

定理 5 在某数域上的任一 n（正整数）次多项式 $f(x)$，必定能分解为不可约多项式的乘积：

$$f(x)=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \tag{1}$$

除一常数因子 c 外，这种分解是唯一的.

证明 首先证明可分解性，如果 $f(x)$ 不可约，那么定理显然成立. 如果 $f(x)$ 可约，那么它可分解为次数较低的因式乘积：

$$f(x)=f_1(x)f_2(x).$$

如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 中有一个或两个还是可约的，那么将它们继续分解. 因为 n 是有限的正整数，而一次多项式总是不可约的，所以上述分解不能无限进行下去，必然于有限次而终止，最后将 $f(x)$ 分解为一系列不可约多项式的乘积：

$$f(x)=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x).$$

其次再证分解的唯一性，如果 $f(x)$ 可分解为如下两种不可约多项式的乘积：

$$f(x)=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x),$$
$$f(x)=dq_1(x)q_2(x)\cdots q_l(x).$$

不妨设 $k\leqslant l$，于是有

$$cp_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)=dq_1(x)q_2(x)\cdots q_l(x).$$

上式左端能被 $p_1(x)$ 整除，故右端也能被 $p_1(x)$ 整除. 由于 $q_1(x)$，$q_2(x)$，$\cdots q_l(x)$ 的不可约性，所以必有一个可被 $p_1(x)$ 整除，不妨设 $q_1(x)$ 被 $p_1(x)$ 整除，但 $q_1(x)$，$p_1(x)$ 都为不可约多项式，又非常数，所以它们只能相差一常数因子，即 $q_1(x)=c_1p_1(x)$. 类似地有 $q_2(x)=c_2p_2(x)$，$\cdots$，$q_k(x)=c_kp_k(x)$.

如果 $k<l$，则有

$$cp_1(x)\cdots p_k(x)=dc_1\cdots c_kp_1(x)\cdots p_k(x)q_{k+1}(x)\cdots q_l(x),$$

或
$$c=dc_1\cdots c_kq_{k+1}(x)\cdots q_l(x).$$

然而这是不可能的，常数 c 不能被非零次多项式 $q_{k+1}(x)\cdots q_l(x)$ 所整除.

于是只能有 $k=l$，即有

$$q_1(x)=c_1p_1(x),\cdots,q_k(x)=c_kp_k(x).$$

这样我们就证明了在相差常数因子的情况下，分解式是唯一的.

如果我们将所有不可约多项式的首项系数提出来，而使它们的首项系数变为 1、那么分解式变为

$$f(x)=a_0p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \qquad (2)$$

其中 $p_1(x)$，$\cdots$，$p_k(x)$ 的首项系数为 1，a_0 为 $f(x)$ 的首项系数. 显然，分解式 (2) 是唯一确定的. 在 (2) 式的标准下，$f(x)$ 的分解式就唯一了，连常数因子也不能相差了.

在 $f(x)$ 的分解式中，不可约多项式可以相同，相同的 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式，有 r 个相同即为 r 重因式. 将重复的因

式归并起来，则有

$$f(x)=a_0 p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_t^{k_t}(x), \qquad (3)$$

其中 $p_i(x)$ 是彼此不同的首项系数为 1 的不可约多项式．我们把分解式 (3) 叫做 $f(x)$ 的标准分解式．

上述多项式因式分解唯一性定理，从理论上回答了多项式可以在所讨论的数域上分解为不可约因式的乘积，但是这没有提供实际分解的方法．对多项式进行具体分解，有时是异常困难的，因为这又和多项式在该数域里是否有根联系在一起．正如大家所熟知的，多项式的因式分解常需要深入的思考和特殊的技巧．

思 考 与 练 习

1．整数里的合数与质（素）数是十分确定的，但多项式的可约与不可约却依赖于多项式系数所取自的数域，从而显得不确定．你能否进一步论述一下上述差异，以展示多项式论的一系列结果不完全和整数论的结果相平行．

2．x^2+1 是不可约多项式吗？这样的提问方式有什么不妥之处．

3．试证明复数域的二次多项式总是可约多项式，而实数域上存在任意高次数的不可约多项式．

4．在实数域和复数域上分解 $x^4+a^2x^2+a^4$ $(a>0)$ 的各因式．

5．在实数域上分解 $x^{2n}-1$ 的因式．

6．在有理数域，实数域，复数域上，对多项式 $f(x)=2x^4-2x^2-4$ 进行因式分解．

§ 11 代数基本定理

一次至四次方程的公式解告诉我们两件事：一是指出了根的存在性；二是提供了求根的途径．五次及五次以上的一般方程不存在公式解，因此必然会提出，一般的 n 次代数方程是否有根？方程论里的这一根本性的经典问题耗费了历代数学家的智慧与毅力．德国著名数学家高斯（1777—1855）于 1799 年首次解决了这个问题，证明了 n 次代数方程在复数域里至少有一个根，这个定理叫做代数基本定理．利用这个定理就可以得到 n 次代数方程在复数域里有 n 个根（k 重根算 k 个）．

高斯于 1815 年和 1816 年又提出另外两个证明，1849 年他又把最早的证明作了简化．现在，关于这个定理的证法很多，有纯代数的证明，也有用函数论方法的证明．不论哪一种方法，都要有相当的准备知识．但是，如果我们利用关于连续函数连续性的直观认识——连续曲线与连续曲面，那么我们就可以给出代数基本定理证明的基本思路和一个详细轮廓．

定理 1 任何一个复数域上的 n（正整数）次代数方程在复数域里至少有一个根．

证明 不妨设 n 次代数方程为

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x$$
$$+a_n=0.$$

我们研究多项式 $f(x)$ 当 x 在复数域中变化时 $f(x)$ 的绝对值（即模）$|f(x)|$ 的变化情况．

设 $|x|=R$，那么有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n| \\
&> |x^n| - |a_1||x^{n-1}| - \cdots - |a_n| \\
&= |x|^n(1 - |a_1||x|^{-1} - \cdots \\
&\quad - |a_n||x|^{-n}) \\
&= R^n(1 - |a_1|R^{-1} - \cdots - |a_n|R^{-n}).
\end{aligned}
$$

从上式可以看出，当 $|x|=R\to\infty$ 时，有 $|f(x)|\to\infty$. 这就是说，当复数 x 的绝对值充分大时，函数值 $f(x)$ 的绝对值也会充分大.

另一方面，$|f(x)|$ 随着 x 的连续变化而连续变化，而且有下界 0：$|f(x)|\geqslant 0$. 由此容易相信 $|f(x)|$ 有最小值 μ.

因为 $|x|$ 充分大为有 $|f(x)|$ 充分大，所以 $|f(x)|$ 的最小值点不会在无穷远处取到，而是在一个有限范围里取到. 根据曲面 $u=|f(x)|$ 的连续性（注意：x 在复数平面上变化），它可以达到最小值. 设 $|f(x)|$ 在 x_0 处取到最小值 μ，即

$$|f(x_0)|=\mu.$$

如果我们证明了 $\mu=0$，那么就有 $|f(x_0)|=0$，从而 $f(x_0)=0$，x_0 就是多项式 $f(x)$ 的根，这样就完成了定理的证明.

现在我们来证明 $\mu=0$. 用反证法证之.

如果 $\mu\neq 0$，即 $|f(x_0)|\neq 0$. 那么可以利用数 $f(x_0)$ 再作一个新的多项式

$$p(x)=\frac{f(x+x_0)}{f(x_0)},$$

它与 $f(x)$ 同次数，但是已具有性质：

$$p(0)=\frac{f(0+x_0)}{f(x_0)}=1,$$

$$|p(x)|=\frac{|f(x+x_0)|}{|f(x_0)|}\geqslant 1,$$

这是由于 $|f(x_0)|$ 是最小值，必有 $|f(x+x_0)|\geqslant|f(x_0)|$ 的缘故.

将 $p(x)$ 各项写成下面的形式：

$$p(x)=1+b_kx^k+\cdots+b_nx^n,$$

其中 $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$ 是使非常数项系数 $b_k\neq 0$ 的最小正整数.

复数点 $b_k=|b_k|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 可以绕原点旋转一个适当的角度而达到实轴上的负数点 $-|b_k|$，这个角度设为 $k\theta$，即有 $k\theta+\varphi=180°$. 于是

$$\begin{aligned}(\cos k\theta+i\sin k\theta)b_k&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)|b_k|\\&\quad(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\&=|b_k|[\cos(k\theta+\varphi)\\&\quad+i\sin(k\theta+\varphi)]\\&=-|b_k|.\end{aligned}$$

现在我们取绝对值 r 充分小幅角为 θ 的复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，估计 $p(x)$ 在该点处的绝对值：

$$\begin{aligned}|p[r(\cos\theta+i\sin\theta)]|&\leqslant 1-r^k|b_k|\\&\quad+r^{k+1}|b_{k+1}|+\cdots+r^n|b_n|\\&=1-r^k(|b_k|-r|b_{k+1}|-\cdots-r^{n-k}|b_n|).\end{aligned}$$

当 r 充分小时，可使

$$|b_k|-r|b_{k+1}|-\cdots-r^{n-k}|b_n|>0,$$

从而使 $\quad |p[r(\cos\theta+i\sin\theta)]|\leqslant 1-\text{小正数}<1,$

与 $\quad |p(x)|\geqslant 1 \quad$ (对一切 x 值成立)

相矛盾. 这是由于我们假设了 $\mu\neq 0$ 所引起的，于是必须有 $\mu=0$，即 $|f(x_0)|=0$ 从而有 $f(x_0)=0$. $|f(x)|$ 的最小值点 x_0 就是方程 $f(x)=0$ 的根.

定理 2 任何一个 n 次代数方程在复数域中有 n 个根，从而在复数域里可分解为一次因式的乘积.

证明 设 $f(x)$ 为 n 次多项式，其首项系数为 a_0. 由定理1可知 $f(x)=0$ 有一个根 x_1，于是用 $x-x_1$ 去除 $f(x)$ 得

$$f(x)=(x-x_1)q_1(x)+r_1,$$

因为 $f(x_1)=0$，所以将 $x=x_1$ 代入后得到 $r_1=0$，于是有

$$f(x)=(x-x_1)q_1(x).$$

$q_1(x)$ 是 $(n-1)$ 次方程，重复运用定理 1，又有根 x_2，使 $q_1(x_2)=0$，从而有

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)q_2(x).$$

如此继续，至 n 次后，即有

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

其中可能有些根相同，这就会出现重因式. 因此它的一般形式又可写为更简洁的形式：

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_t)^{k_t},$$
$$(k_1+k_2+\cdots+k_t=n).$$

从函数观点来看，一个复函数所起的作用是把一个复数点 α 通过复函数关系 f 映照为复数点 $f(\alpha)$. 或者说，复函数把点 α “搬家”到了点 $f(\alpha)$. 定理 2 告诉我们，对于 n 次多项式这种复函数，在复平面上一定存在而且只存在 n 个点（k 重根算 k 个点），多项式把它们映照为原点（零点）.

利用上述定理，我们还可以把上一节有关不可约多项式的问题作更深入的讨论，它解决了实数域和复数域上的不可约多项式的判定问题.

定理 3 复数域上的多项式成为不可约多项式的充分必要条件是它是一次多项式.

证明 上一节已解决了一次多项式是不可约多项式的问题. 如果 $f(x)$ 的次数大于 1，那么在复数域上必有根 α，于是 $f(x)$ 可被 $(x-\alpha)$ 整除，从而 $f(x)$ 是可约的. 这样，只有一

次多项式是复数域上的不可约多项式.

为了讨论实数域上的不可约多项式的特征，我们建立实系数多项式具有共轭根的定理. 这个定理本身也是十分重要的.

定理 4 设 $f(x)$ 是实系数多项式，若 $\alpha=a+bi$ 是它的根，则它的共轭复数 $\overline{\alpha}=a-bi$ 也是这多项式的根.

证明 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 若 α 是 $f(x)$ 的根，则 $f(\alpha)=0$，即

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0.$$

利用对复数取共轭数的运算性质，有

$$\begin{aligned}f(\overline{\alpha})&=a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n\\&=\overline{a_0}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}+\overline{a_n}\\&=\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n}\\&=\overline{f(\alpha)}=\overline{0}=0.\end{aligned}$$

在上述演算中，利用了实数 a_i 与它的共轭数 $\overline{a_i}$ 相等这一明显事实. 这样，我们就证明了 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根.

由于实系数多项式含复根 α 的同时也含有它的共轭数 $\overline{\alpha}$ 这个根，所以实系数多项式的复根总是成对出现的，复根的总数必定是偶数，占用了实系数多项式的偶次因式，因此就不难得到下述推论：

推论 奇数次实系数多项式至少有一个实根.

定理 5 实数域上的不可约多项式，或是一次多项式，或是二次多项式 ax^2+bx+c $(b^2-4ac<0)$.

证明 一次多项式显然是不可约的.

二次多项式 ax^2+bx+c 在 $b^2-4ac<0$ 的条件下，有一对共轭复根，所以它不能在实数域里分解为一次因式，因而这样的二次多项式成为实数域上的不可约多项式.

对于次数大于二的多项式，我们来证明 $f(x)$ 在实数域上

必是可约的.

若 $f(x)$有实根 a，那么因式$(x-a)$是实多项式，整除$f(x)$，所以 $f(x)$ 为可约.

若 $f(x)$ 有复根 α，那么它必有共轭复根$\overline{\alpha}$，于是 $f(x)$含有因式

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}.$$

这是一个实系数多项式，因为

$$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$\overline{\alpha\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

因此，$f(x)$ 含有实系数多项式的因式 $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\overline{\alpha\alpha}$，故 $f(x)$ 可约.

推论 任何实数域上的 n 次多项式 $f(x)$ 可唯一地表示为

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_r)^{k_r}$$
$$\times(x^2+p_1x+g_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+g_s)^{l_s},$$

其中 a_0 是 $f(x)$ 的首项系数，x_i 均不同，若 $p_i=p_j$ 则必 $g_i\neq g_j$ $(i\neq j)$，$k_1,\cdots,k_r,l_1,\cdots,l_s$ 都是正整数，且有

$$k_1+\cdots+k_r+2l_1+\cdots+2l_s=n.$$

实数域上的多项式 $f(x)$ 的分解式都是实系数多项式，没有出现复数．这给人们以错觉，认为上述分解式成立的论证与复数无关．其实，从我们的证明中看到，正是由于复数所起的作用才使定理、推论得以成立．因此用实数表述的上述分解式，本质上是复数领域里的事情．上述事实说明了数学里常有这样的现象，一些简单的对象，其内在属性的揭露常常依赖于高一级的复杂对象的研究．简单里面含有不简单的因素，这正是普遍的规律．数学作为辩证的辅助工具，必然会反映这一点.

思考与练习

1. 当多项式 $f(x)$ 在复数平面上取值，即 x 及 $y=f(x)$ 都可取复数时，$y=f(x)$ 的几何意义是什么？这时"$y=f(x)$ 的几何意义是曲线"这种说法妥当吗？
2. 多项式 $f(x)$ 的绝对值（模）$|f(x)|$ 当 x 在复数平面上取值时，$u=|f(x)|$ 的几何意义是什么？
3. 设 $f(x)=x^2-1$，x 在以原点为中心以 1 为半径的单位圆周上变化，求 $|f(x)|=|x^2-1|$.（提示：这时 $x=cos\varphi+isin\varphi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$.）
4. 设 $f(x)=x^7-x+2$，证明 $f(x)$ 至少有一个实根.
5. 设 $f(x)=x^6-1$，找出它的各对共轭根.（提示：$x^6-1=0$ 的根位于单位圆的内接正六边形的顶点上.）
6. 试证 n 次多项式在复数域里有且仅有 n 个根（k 重根算 k 个）.
7. 多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 恒等于零的充要条件是 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$.（提示：用反证法.如果 $a_0\neq0$，则利用题 6 推知多项式不恒等于0，所以有 $a_0=0$.类似可证 $a_1=\cdots=a_n=0$.）
8. 两个多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

恒等的充要条件是 $a_0=b_0$，$a_1=b_1$，…，$a_n=b_n$，由此回答待定系数法的理论根据是什么？（提示：利用题 7 的结果.）

9. 设 $f(x)$ 是实系数多项式，若 $\alpha=a+bi$ 是它的 k 重根（k 是大于 1 的正整数），则 $\overline{\alpha}=a-bi$ 也是该多项式的 k 重根.
10. 试证：复数域上的次数大于 1 的多项式总是可约的.

§12 多项式的插值公式

n 次多项式的零点在复数域上有且仅有 n 个（k 重算 k 个）．反之，给出了多项式的 n 个零点，再给出另外一个点上的函数值，那么该多项式也就被唯一决定．事实上，设 x_1，x_2，…，x_n 为 $f(x)$ 的 n 个零点，且 $y_{n+1}=f(x_{n+1})$ $(x_{n+1}\neq x_i$，$i=1, 2, \cdots, n)$，那么

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$\left(a_0=\frac{y_{n+1}}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)}\right),$$

便是被唯一决定的多项式．

上述事实，诱导出一个新的情况：n 次多项式可以被 $(n+1)$ 个点上的函数值所唯一决定．

为了实用，我们考虑实数域上的多项式，并且从下面的角度和方式再次提出上述问题．

任意画一条曲线，一般来说，曲线上的这一点与那一点并没有什么必然的联系，更不能说曲线上的这部分点被另一部分点所完全决定．

但是，对于特殊的曲线（族）来说，曲线上这些点与那些点并不孤立，甚至会受到强力的约束与联系．

直线，它上面的无穷多个点分布的状态可以被其中的任意两个点（不同的）所完全决定．圆，它上面的无穷多个点分布的状态可以被其中的任意三个点（不同的）所完全决定．

现在我们考虑实系数且自变量取实数的 n 次多项式．它在直角坐标系下的函数图象叫做 n 次抛物线．之所以如此命名是

基于二次多项式在直角坐标系下的图象是抛物线的事实.

现在我们提问：n 次抛物线，它上面的无穷多个点分布的状态可以被它上面多少个点的位置所唯一决定？简言之，n 次抛物线可以被它上面多少个点的位置而唯一确定？这样提出问题具有很大的实用价值. 在造船工业中，船体上很多曲线形用三次抛物线形来代替就能满足技术要求. 如果三次抛物线可以被其中若干个点所决定，那么用这几个点的位置数据就可以决定整个三次抛物线，这对于设计，船体放样所需要的数据量就大为减少了.

问题的回答是：n 次抛物线可以被它上面的不同的 $n+1$ 个点所唯一决定. 现在我们来讨论这个问题.

定理 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 是至多 n 次的多项式. 如果对于自变数的 $n+1$ 个不同值都有相同的值，那么它们恒等，即 $f(x)\equiv g(x)$.

证明 如果不然，作差 $f(x)-g(x)$，它是次数不超过 n 的多项式，然而它对于 x 的 $n+1$ 个不同的值变为零，即有 $n+1$ 个零点，这是不可能的，因为即使是 n 次多项式也只有 n 个零点. 因此 $f(x)-g(x)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv g(x)$.

定理 2 存在次数不超过 n 的多项式 $p_n(x)$，它在 $n+1$ 个不同的点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 上各等于给定的数 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$. 亦即，存在唯一的一条次数至多为 n 的抛物线，通过给定的 $n+1$ 点：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_{n+1}, y_{n+1}).

证明 试看下面至多为 n 次的多项式

$$p_n(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n+1})}$$

$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n+1})}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+$$

$$+y_i\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+$$

$$+y_{n+1}\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}. \quad (1)$$

通过验算，有

$$p_n(x_1)=y_1,\ p_n(x_2)=y_2,\ \cdots,\ p_n(x_{n+1})=y_{n+1},$$

亦即次数不超过 n 的抛物线通过 $n+1$ 个点：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

公式 (1) 称为拉格朗日插值多项式.

插值多项式的特殊情况是过两点的直线方程和过三点（不在一直线上）的抛物线方程：

$$y=y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

由定理 1 定理 2 立即可以得到：n 次抛物线被它上面的 $n+1$ 不同的点所唯一决定．事实上，由定理 2 知，存在次数至多为 n 的抛物线通过 $n+1$ 不同的点；由定理 1 知，这条抛物线必是原来的那条 n 次抛物线.

例 1　设二次抛物线通过点 (1,1)，(−1,3)，(2, 3)，求该抛物线方程.

解 将 $x_1=1, y_1=1$, $x_2=-1, y_2=3$, $x_3=2, y_3=3$ 代入插值公式，得

$$y=\frac{(x+1)(x-2)}{2\cdot(-1)}+3\frac{(x-1)(x-2)}{-2\cdot(-3)}$$
$$+3\frac{(x-1)(x+1)}{1\cdot 3}=x^2-x+1.$$

例 2 设 a,b,c 为三个相异的实数，求一个多项式，这个多项式所决定的函数 $y=f(x)$ 将 a 变为 b，将 b 变为 c，将 c 变为 a.

解 按题意，这是一个二次多项式，它通过点 (a,b)，(b,c)，(c,a). 由插值公式得

$$y=b\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+c\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$
$$+a\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

思 考 与 练 习

1. 我们知道，n 次抛物线被它上面的 $n+1$ 个点所决定. 如果先在平面上给定 $n+1$ 个点，那么由这些点所决定的多项式一定是 n 次多项式吗？
2. 求通过点 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 的插值多项式.
3. 求通过点 $(0,1)$，$(-1,2)$，$(1,1)$ 的抛物线.
4. 给定一数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，求一多项式使它在 a_i 处取值 $a_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n)$，在 a_{n+1} 处取值 a_1.
5. 求多项式 $p(x)$ 除以乘积 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的余式，其中 a, b, c 两两互异.（提示：余式 $r(x)$ 是二次多项式，又可证 $r(a)=p(a)$，$r(b)=p(b)$，$r(c)=p(c)$，利用 $p(a)$，$p(b)$，$p(c)$ 就可以求 $r(x)$.）

§13 多项式根的界限

让我们先回顾一下以前各节的讨论.

开始，我们研究了整式代数方程的一些具体性质，特别是如何解方程，我们给出了四次以下的方程的公式解，也介绍了解高次方程的特殊技巧．解出了方程，这似乎给我们以完成任务后的轻松感.

接着，在指出五次及五次以上的方程无公式解后，我们就不得不转入理论上的研究，从具体到抽象，希望从理论上打开通路．我们集中力量对构成方程左端的多项式进行了各种性质的探讨，建立了以代数基本定理为终点的一系列结果．这就使我们更好地认识了整式代数方程的问题，实际上是多项式理论的问题.

现在，我们再从抽象回到具体，上一节的插值多项式的建立已经是这样做了．我们应该想到，代数基本定理只说明了根的存在性，并没有指出求根的途径．还有，既使三、四次方程有公式解，但是公式之复杂程度大大降低了它的实用价值．即使求得了公式解，还需近似算出它的有理数值以便实用．因此，付之实用的关于多项式根的估计、近似计算的讨论就显得十分必要了.

在这一节中，我们先讨论多项式根的界限．所谓根的界限，顾名思义就是指多项式根所处的一个范围，是对多项式根的一个大致估计.

具体地说，如果多项式 $f(x)$ 所有的根的绝对值满足关系：

$$m \leqslant \text{所有的根的绝对值} \leqslant M,$$

那么 $f(x)$ 的根就落在以 M，m 为半径的圆环里，M 和 m 分别叫做根的绝对值的上界和下界.

如果只考虑实根，比如 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是多项式 $f(x)$ 的全部实根，那么满足关系式

$$m \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant M$$

的数 M 和 m 分别叫做 $f(x)$ 的实根的上界和下界.

类似地还可以定义正根的上界和下界以及负根的上界和下界，这都是容易明白的.

定理 1 设复数域上的多项式为

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0),$$

又设 A 是 $|a_1|$，$|a_2|$，$\cdots$，$|a_n|$ 中的最大值，那么数 $1+\dfrac{A}{|a_0|}$ 是 $f(x)$ 的根的上界.

证明 象证明代数基本定理时那样，我们将 $|f(x)|$ 的值不断缩小其估计式的范围，其中要用到几何数列求和公式.

$$\begin{aligned}|f(x)| &\geqslant |a_0x^n|-|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|\\ &\geqslant |a_0||x|^n-A(|x|^{n-1}\\ &\quad+|x|^{n-2}+\cdots+1)\\ &=|a_0||x|^n-A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}\\ &=|x|^n\left(|a_0|-\frac{A}{|x|-1}\right)+\frac{A}{|x|-1}.\end{aligned}$$

设 $|x|>1$，于是有

$$|x|-1>0 \quad \text{和} \quad \frac{A}{|x|-1}>0,$$

于是 $$|f(x)|>|x|^n\left(|a_0|-\frac{A}{|x|-1}\right).$$

若要 $|f(x)|>0$，只要 $|x|\neq 0$ 以及

$$|a_0|-\frac{A}{|x|-1}>0,$$

$$|a_0|>\frac{A}{|x|-1},$$

$$|x|-1>\frac{A}{|a_0|},$$

$$|x|>1+\frac{A}{|a_0|}.$$

因此，当 $|x|>1+\frac{A}{|a_0|}$ 时，总有 $|f(x)|>0$. 这说明在 $|x|>1+\frac{A}{|a_0|}$ 时，$|f(x)|$ 不会取零值，因此 $f(x)$ 的全部根的绝对值（或模）必定小于 $1+\frac{A}{|a_0|}$，数 $1+\frac{A}{|a_0|}$ 就成为 $f(x)$ 根的绝对值的一个上界.

定理 1 不仅适用于多项式的实根，也适用于复根情形. 适用范围大，必然使结果不精细，显得粗糙. 下面的定理 2，给出了估计正根上界的较为精细的结果.

定理 2 设实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 $a_0>0$. 再设 $a_k\ (k\geqslant 1)$ 是 a_0 以后第一个为负数的系数，B 是所有负系数的绝对值的最大值，那么数 $1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$ 是多项式 $f(x)$ 的正根上界.

证明 如果题中所设的 a_k 不存在，即全部系数为正，那么

$f(x)$ 不会有正根，无需讨论了.

我们假设 $x>1$，那么有

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geqslant a_0x^n-(|a_k|x^{n-k}+|a_{k+1}|x^{n-k-1}+\cdots \\
&\quad +|a_{n-1}|x+|a_n|) \\
&\geqslant a_0x^n-B(x^{n-k}+x^{n-k-1}+\cdots+x+1) \\
&=a_0x^n-B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1} \\
&>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1)-B] \\
&>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0(x-1)^{k-1}(x-1)-B] \\
&=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0(x-1)^k-B].
\end{aligned}
$$

由于 $x>1$，所以欲使 $f(x)>0$，只需

$$a_0(x-1)^k-B>0,$$

$$a_0(x-1)^k>B,$$

$$(x-1)^k>\frac{B}{a_0},$$

$$x>1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}.$$

因此，在 $x>1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$ 的条件下，必定有 $f(x)>0$. 这说明 $f(x)$ 的正根的一个上界是 $1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$.

例如，我们讨论多项式

$$f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

之实根的上界.

由定理 1，$a_0=1$，$A=8$，所以其实根的上界为

$$1+\frac{8}{1}=9.$$

由定理 2，$a_0=1$，$k=2$，$B=7$，所以其正根的上界，或是实根的上界为

$$1+\sqrt[2]{\frac{7}{1}}=1+\sqrt{7}<3.6.$$

显然，由定理 2 得到的上界较为精确.

再如，对于多项式

$$f(x)=2x^5+3x^4-10x^3-60x^2+40x+200,$$

由定理 1 得到的根的界限是：

$$a_0=2,\ A=200,$$

$$\text{上界 } M=1+\frac{200}{2}=101;$$

由定理 2 得到的根的界限是：

$$a_0=2,\ k=2,\ B=60,$$

$$\text{上界 } M=1+\sqrt{\frac{60}{2}}<6.5.$$

如何求多项式的根的下界、正根的下界、负根的上界呢？为此，我们研究多项式 $f(x)$ 的根与下列各多项式的根之关系：

$$f(-x),\ \ x^nf\left(\frac{1}{x}\right),\ \ x^nf\left(-\frac{1}{x}\right).$$

设 $g_1(x)=f(-x)$ 的正根为 x_0，于是 $g_1(x_0)=0$，从而 $f(-x_0)=0$，这说明 $-x_0$是$f(x)$ 的负根. 如果M是 $g_1(x)$ 的上界，那么对于 $g_1(x)$ 的根 x_0，有 $x_0\leqslant M$，从而有 $-x_0\geqslant -M$，于是 $-M$ 就是 $f(x)$ 的下界. 这样，$f(-x)$ 的根的上界之相反数就是 $f(x)$ 的根的下界.

同样的道理可以推知：$x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$的正根的上界的倒数，就是$f(x)$的正根的下界；$x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$的正根的上界倒数的相反数，就是$f(x)$的负根的上界.

例 试求多项式 $f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ 的根的上界、下界、正根的下界、负根的上界.

解 （Ⅰ）$f(x)$的上界3.6，这已在上面求出.

（Ⅱ）$f(x)$的根的下界：

$$f(-x)=-x^5+2x^4+5x^3+8x^2+7x-3=0,$$

考虑方程 $x^5-2x^4-5x^3-8x^2-7x+3=0,$

运用定理2，得到它的根的上界是

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}=1+\frac{8}{1}=9,$$

所以$f(x)$的根的下界是-9.

（Ⅲ）$f(x)$的正根的下界：

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^5\left(\frac{1}{x^5}+2\frac{1}{x^4}-5\frac{1}{x^3}+8\frac{1}{x^2}-7\frac{1}{x}-3\right)$$

$$=-3x^5-7x^4+8x^3-5x^2+2x+1=0,$$

考虑方程 $3x^5+7x^4-8x^3+5x^2-2x-1=0,$

求得它的根的上界是

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}=1+\sqrt{\frac{8}{3}}<2.7,$$

所以$f(x)$的正根的下界是$\frac{1}{2.7}$.

（Ⅳ）$f(x)$ 的负根的上界：

$$x^5 f\left(-\frac{1}{x}\right)=-3x^5+7x^4+8x^3+5x^2+2x-1$$
$$=0,$$

考虑方程　　$3x^5-7x^4-8x^3-5x^2-2x+1=0,$

求得它的根的上界是

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}=1+\frac{8}{3}<3.7,$$

所以 $f(x)$ 的负根的上界是 $-\dfrac{1}{3.7}$.

思考与练习

1. 定理 1 证明中的绝对值既可理解为实数的绝对值，又可理解为复数的绝对值（即模），你是否能讲一讲其中的道理.
2. 试确定多项式 $f(x)=2x^4-x+3i$ 的根的范围.
3. 试确定 $x^5-10x^2-2x+4=0$ 的根的范围，其正根的上下界，负根的上下界.
4. 设 $f(x)$ 为多项式，试证多项式 $x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的正根的上界的倒数，就是$f(x)$ 的正根的下界.

§ 14　根的近似计算

现在，我们在实数域上讨论多项式根的近似计算.

设 $f(x)$ 是实系数的多项式. 将变数 x 按置在坐标平面的横轴上，函数值 $f(x)=y$ 按置在纵轴上，那么满足二元不定方程 $y=f(x)$ 的点对 (x, y) 的全体，在坐标平面上形成一条连续曲线，这就是我们在§12中提到的 n 次抛物线.

如果 x_0 是 $f(x)$ 的根：$f(x_0)=0$. 那么点 $(x_0, 0)$ 就是连续曲线 $y=f(x)$ 与横轴的公共点，"根" x_0 恰好是公共点的横坐标. 这样，求根的问题变成了求连续曲线 $y=f(x)$ 与横轴公共点的问题.

如果出现这样的情况：$f(a)<0, f(b)>0$ $(a<b)$，那么连续曲线 $y=f(x)$ 必然在 $x=a$ 与 $x=b$ 之间穿过横轴形成一个交点（至少一个），即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个根存在. 如果 a 与 b 很接近，亦即区间很小，那么就可用 a 或 b 作为这个根近似值. 不断缩小这种区间，就能逐次接近所求的根. 多项式根的近似计算方法的基本精神就在于此.

（一）对分法

设多项式 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 两端的值异号，不妨设 $f(a)<0$, $f(b)>0$. 计算多项式 $f(x)$ 在区间中点 $\frac{a+b}{2}$ 的值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. 如果恰巧有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，那么就找得了一个根 $\frac{a+b}{2}$；如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$，那么选取一个与 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 异号的

端点，使该端点与$\frac{a+b}{2}$形成一个新的区间，用新的记号记作$[a_1, b_1]$，若$a_1=a$，则$b_1=\frac{a+b}{2}$；若$a_1=\frac{a+b}{2}$，则$b_1=b$。

对区间$[a_1, b_1]$，计算多项式$f(x)$在区间中点$\frac{a_1+b_1}{2}$的值$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$，按上述同样的方法，得到$[a_2, b_2]$，如此继续，得到一系列区间，形成一个套住一个的递缩区间套：

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

它具有性质：

（Ⅰ）后一个区间含在前一个区间之内，其长度则是前一个的一半；

（Ⅱ）多项式$f(x)$在每个区间端点的函数值异号：

$$f(a_i)\cdot f(b_i)<0 \qquad (i=1, 2, \cdots).$$

由性质（Ⅰ）推出，区间$[a_i, b_i]$向某一点x_0缩拢，即a_i，b_i随着i变大越来越接近于x_0；再由性质（Ⅱ）可知，$f(x)$在x_0充分小的两旁函数值总是异号．因为曲线$y=f(x)$是连续的，所以$f(x)$在x_0处的函数值不得不取零值，即有$f(x_0)=0$。于是x_0就是$f(x)$的根．用a_i或b_i代替x_0就成为$f(x)$的根x_0的近似值．

例 求$f(x)=x^3-2x-5$在区间$[2, 3]$里的一个根的近似值．

解 分别计算下面一系列函数值和区间：

端点函数值	有根区间
$f(2)=-1<0$，$f(3)=16>0$，	$[2, 3]$；
$f(2.5)>0$，	$[2, 2.5]$；

$f(2.25)>0$, $[2, 2.25]$;

$f(2.125)>0$, $[2, 2.125]$;

$f(2.0625)<0$, $[2.0625, 2.125]$;

$f(2.09375)<0$, $[2.09375, 2.125]$;

$f(2.109375)>0$, $[2.09375, 2.109375]$.

于是得到，$f(x)$ 的一个根的近似值为

$$x_0 \approx \frac{2.09375+2.109375}{2} = 2.1015625,$$

它的误差界限是 $\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}=0.0078125$（根 x_0 的准确值是 $2.0945514815\cdots$）.

（二）秦九韶法

我国秦九韶（南宋时代）约在1247年发明了一种高次方程根的近似计算法，我们称之为秦九韶法．这种方法外国叫做所谓霍耐法．霍耐是英国数学家，他在1819年才发现这个方法，迟于我国500多年．

设多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_0$ 有根 $\alpha=\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 求出它的整数部分 α，然后作变量代换

$$x=\alpha+y,$$

得到

$$\varphi_1(y)=f(\alpha+y).$$

当 $y=0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi_1(0.\alpha_1\alpha_2\cdots) &= f(\alpha+0.\alpha_1\alpha_2\cdots) \\ &= f(\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots) \\ &= a_0(\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots)^n \\ &\quad +a_1(\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots)^{n-1}+\cdots+a_0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

这就是说，$\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是 $f(x)$ 的根时，$0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 就是 $f(a+y)$

$=\varphi_1(y)$ 的根.

再进行变量代换

$$y=\frac{z}{10},$$

得到 $$\psi_1(z)=\varphi_1\left(\frac{z}{10}\right).$$

$\varphi_1(y)$ 有根 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 时，$\varphi_1(0.\alpha_1\alpha_2\cdots)=0$，相应的 $\psi_1(z)$ 的根 z_0 可从下式求出：

$$\frac{z_0}{10}=0.\alpha_1\alpha_2\cdots,$$

$$z_0=\alpha_1.\alpha_2\alpha_3\cdots,$$

以上说明，若 $\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是 $f(x)$ 的根，则通过位移变换 $x=a+y$，$0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 就是 $\varphi_1(y)=f(a+y)$ 的根；再通过伸缩变换 $y=\frac{z}{10}$，$\alpha_1.\alpha_2\alpha_3\cdots$就是 $\psi_1(z)=\varphi_1\left(\frac{z}{10}\right)$ 的根；设法求它的根的整数部分 α_1，然后再作位移变换 $z=\alpha_1+u$，再作伸缩变换 $v=\frac{u}{10}$，… 求出新的多项式根的整数部分 α_2. 如此继续，我们就可以求出 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$.

以上所说的是秦九韶方法的基本思路，在具体实施时还会遇到计算上的麻烦. 从 $f(x)$ 获得 $\varphi_1(y)=f(a+y)$，要展开各次二项式 $(a+y)^k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，计算量很大. 如果利用微积分中的泰劳公式，那当然很容易. 早在十三世纪的秦九韶却创立了一个很巧妙的计算方法，可以较简单地把 $\varphi_1(y)$ 的各项系数计算出来. 下面我们介绍这一方法.

$$\varphi_1(y)=f(a+y)=a_0(a+y)^n$$
$$+a_1(a+y)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(a+y)+a_n$$

$$=b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_{n-1}y+b_n.$$

如果用 $y-a$ 代换 y，则得

$$\begin{aligned}&a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n\\&\quad=b_0(y-a)^n+b_1(y-a)^{n-1}\\&\qquad+\cdots+b_{n-1}(y-a)+b_n\\&\quad=[b_0(y-a)^{n-1}+\cdots+b_{n-1}](y-a)+b_n,\end{aligned}$$

由上可见，b_n 是 $(y-a)$ 除 $f(y)$ 所得的余数．而用 $(y-a)$ 除 $f(y)$ 所得的商式是

$$b_0(y-a)^{n-1}+b_1(y-a)^{n-2}+\cdots+b_{n-2}(y-a)+b_{n-1}.$$

由上式又可知道，b_{n-1} 是 $(y-a)$ 除第一次商式所得的余数．如果对于除第一次商式所得到的第二次商式再用 $y-a$ 去除，那么其余数就是 b_{n-2}，…依此类推，就求得了 $\varphi_1(y)$ 的各项系数．

例　试求 $f(x)=x^3-8x+1$ 在 $[2,\ 3]$ 之间的一个根的近似值，精确到 0.001．

解　为了求

$$\varphi_1(y)=f(2+y),$$

用 $y-2$ 除 $f(y)=y^3-8y+1$．采用综合除法如下：

	1	0	−8	1	|2
		2	4	−8	
第一次商式→	1	2	−4	−7	|2
		2	8		
第二次商式→	1	4	4	|2	
		2			
	1	6			

将上述过程简化为下列格式：

	1	0	−8	1
2	1	2	−4	$-7=b_3$
2	1	4	$4=b_2$	
2	1	$6=b_1$		
2	$1=b_0$			

于是得到

$$\varphi_1(y)=y^3+6y^2+4y-7.$$

再令 $y=\frac{z}{10}$，得

$$\psi_1(z)=\left(\frac{z}{10}\right)^3+6\left(\frac{z}{10}\right)^2+4\left(\frac{z}{10}\right)-7,$$

或

$$10^3\psi_1(z)=z^3+60z^2+400z-7000.$$

试验 0, 1, 2, …, 9 各数，我们得到 $\psi_1(z)$ 在 7 与 8 处值异号，故它在 7 与 8 之间有一个根，因此 $\alpha_1=7$。

对于 $\psi_1(z)$，重复上面的方法，先得下表：

	1	60	400	−7000
7	1	67	869	−917
7	1	74	1387	
7	1	81		
7	1			

得

$$\varphi_2(y)=y^3+81y^2+1387y-917,$$

$$\psi_2(z)=\varphi_2\left(\frac{z}{10}\right)=\left(\frac{z}{10}\right)^3+81\left(\frac{z}{10}\right)^2+1387\left(\frac{z}{10}\right)-917,$$

$$10^3\psi_2(z)=z^3+810z^2+138700z-917000,$$

验得它在 6 与 7 之间有一个根，故 $\alpha_2=6$.

再计算下表：

	1	810	138700	-917000
6	1	816	143596	-55424
6	1	822	148528	
6	1	828		
6	1			

得

$$\varphi_3(y)=y^3+828y^2+148528y-55424,$$

$$10^3\psi_3(z)=z^3+8280z^2+14852800z-55424000,$$

验得它在 3 与 4 之间有一个根，故 $\alpha_3=3$.

于是我们求得多项式的根近似值为 $\alpha=2.763$, 其精确度已达到 0.001.

思考与练习

1. 对分法求实根的近似值，它的理论根据是什么？
2. 在秦九韶法中，变量代换起着什么作用？由此进一步领会变量代换这种思想方法的重要性.
3. 利用秦九韶法求方程 $x^3-2x-5=0$ 的正根，精确到0.01.

§ 15 多项式导函数的应用

多项式的导函数概念，可以独立地由多项式自身出发加以定义，这就是所谓多项式的导式概念，这种概念可以用于讨论一般集合上的多项式理论．但在我们这里由于篇幅的限制不能服从这一计划，所以我们方便地借助于微积分中的导函数概念．在数域上的多项式，多项式的导式与多项式的导函数是一致的．

这一节之所以放在最后，就是因为我们需要读者熟悉微积分基本知识．如果略去这节，这本小册子仍将保持其完整性．

一、多项式的重根或重因式

如果已经知道 $x=a$是多项式$f(x)$的一个根，要判断 $x=a$ 是否为 $f(x)$ 的重根 只要用 $x-a$ 除 $f(x)$，得商式 $g(x)$，然后再用 $x-a$ 除商式 $g(x)$，除尽则为重根，除不尽则不为重根．也可以计算 $g(a)$ 是否为零来判断 a 是否为 $f(x)$ 的重根．

如果用 $x-a$ 除 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的各次商式，能连续除尽 k 次，而第 $k+1$ 次除不尽，那么 $x=a$ 就是 $f(x)$ 的 k 重根，或 $f(x)$ 含有 k 重因式 $(x-a)^k$．

利用导函数概念可以较快地判别多项式有否重根．

定理 多项式 $f(x)$ 有 k 重根 $x=a$ 的充要条件是

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,$$

$$f^{(k)}(a)\neq 0,$$

其中 $f^{(i)}(a)$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 i 阶导数．

证明　由泰勒公式或直接验算，下述式子是成立的：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$\times(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (1)$$

如果定理条件满足，那么

$$f(x)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=(x-a)^k\left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-k}\right],$$

即 $f(x)$ 有 k 重因式 $(x-a)^k$ 或 k 重根 $x=a$.

反之，如果 $f(x)$ 有 k 重根 $x=a$，那么 $f(x)$ 有 k 重因式 $(x-a)^k$，由 (1) 必然有 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$，$f^{(k)}(a)\neq 0$.

例 1　已知方程 $f(x)=x^4+3x^3-3x^2-7x+6=0$ 有重根 $x=1$，解此方程.

解　计算 $f(x)$ 各阶导数：

$$f'(x)=4x^3+9x^2-6x-7,\ f'(1)=0,$$

$$f''(x)=12x^2+18x-6,\ f''(1)\neq 0.$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的二重根. 用 $(x-1)^2$ 除 $f(x)$ 得商式 x^2+5x+6，即有

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+5x+6)$$
$$=(x-1)^2(x+2)(x+3),$$
于是得到方程的四个根是 1, 1, -2, -3.

已知多项式一根判别它是否为重根，可采用上述方法. 但是常常会遇到多项式的根不知道的情况，这时如何判断它有否重根呢？现在我们就来寻找这个问题的解答.

如果 $f(x)$ 含有重因式 $(x-\alpha)^k$，于是
$$f(x)=(x-\alpha)^k g(x) \quad (g(\alpha)\neq 0).$$
对 $f(x)$ 求一阶导数，得到
$$f'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}g(x)+(x-\alpha)^k g'(x)$$
$$=(x-\alpha)^{k-1}[kg(x)+(x-\alpha)g'(x)],$$
因此这时 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 所含的关于 $(x-\alpha)$ 的最高公因式是 $(x-\alpha)^{k-1}$.

一般地说，若 $f(x)$ 在复数域里分解为
$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_t)^{k_t},$$
那么 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式就是
$$(x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}\cdots(x-\alpha_t)^{k_t-1}.$$
如果 $f(x)$，$f'(x)$ 互质，那么表明 $f(x)$ 不含重根或重因式；如果 $f(x)$，$f'(x)$ 的最高公因式是 $d(x)$，而 $d(x)$ 在复数域上分解为
$$d(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_t)^{k_t},$$
那么 $f(x)$ 具有 (k_1+1) 重根 α_1，(k_2+1) 重根 $\alpha_2, \cdots$，(k_t+1) 重根 α_t.

例 2 判定 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$ 有无重根.

解 先求 $f(x)$ 的一阶导数
$$f'(x)=4x^3-3x^2-6x+5,$$
再用辗转相除法求 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式.

×4	1 −1 −3 5 −2	4 −3 −6 5	4
1	4 −4 −12 20 −8	4 −8 4	
	4 −3 −6 5	5 −10 5	5
×(−4)	−1 −6 15 −8	5 −10 5	
1	4 24 −60 32	0	
	4 −3 −6 5		
÷27	27 −54 27		
	1 −2 1		

因此，$x^2-2x+1=(x-1)^2$ 就是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式．故原方程有三重根 $x=1$．

二、施多姆函数列

我们先引进数列的变号概念．设一个数列

$$2 \quad -4 \quad -1 \quad 5 \quad -7,$$

这些数字的符号是

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad -,$$

它们的符号变化有三次：第一个"＋"到第二个"－"是一次变号；第二个"－"到第三个"－"不变号；第三个"－"到第四个"＋"又是一次变号；第四个"＋"到第五个"－"再是一次变号，共计三次变号．这时我们就说，上述数列的变号数是 3．

数列

$$5 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 4$$

的符号是

$$+ \quad + \quad - \quad 0 \quad - \quad + \quad - \quad +,$$

其中 0 不计符号，所以上述数列的变号数是 4．

设 $f(x)$ 是一个不含重因式的实系数多项式，于是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互质．用 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 得余式 $r(x)$：

$$f(x)=f'(x)q(x)+r(x),$$
$$f(x)=f'(x)q(x)-[-r(x)],$$

令 $-r(x)=f_1(x)$，则

$$f(x)=f'(x)q(x)-f_1(x).$$

用 $f_1(x)$ 除 $f'(x)$，得余式 $r_2(x)$，再令 $f_2(x)=-r_2(x)$，于是有

$$f'(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x),$$

再用 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$，以此类推，得到一系列等式：

$$\begin{cases} f(x)=f'(x)q(x)-f_1(x), \\ f'(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2}(x)=f_{m-1}(x)q_{m-1}(x)-f_m(x), \end{cases} \quad (2)$$

式中 $f_m(x)=$常数代表多项式 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式，这是因为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互质．

我们将上述辗转相除得到的一系列函数

$$f(x), f'(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{m-1}(x), f_m(x)$$

叫做 $f(x)$ 的施多姆函数列．

例 3 试求多项式 $f(x)=x^4-5x^2+8x-8$ 的施多姆函数列．

解 先求 $f(x)$ 的导数

$$f'(x)=4x^3-10x+8.$$

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 是否互质可从辗转相除最后所得的最高公因式是否为常数而判定．

利用系数分离法进行符合上述要求的辗转相除：

1	4　0　−20　32　−32	4　0　−10　8	×25
	4　0　−10　8	100　0　−250　200	20
÷2	−10　24　−32	100　−240　320	
变号	−5　12　−16	240　−570　200	48
$f_1(x)\times 9$	5　−12　16	240　−576　768	
−15	45　−108　144	6　−568	÷3
	45　−4260	3　−284	变号
÷4	4152　144	−3　284	$f_2(x)$
−346	1038　36		
	1038　−98264		
变号	98300		
÷98300	−98300		
$f_3(x)$	−　1		

于是得到

$$f(x)=x^4-5x^2+8x-8,$$

$$f'(x)=4x^3-10x+8,$$

$$f_1(x)=5x^2-12x+16,$$

$$f_2(x)=-3x+284,$$

$$f_3(x)=-1.$$

需要注意的是在上述运算过程中，对余式可乘除以正数，切不可乘除以负数，因为这会影响 $f_i(x)$ 的符号．乘除以正数所得的 $f_i(x)$ 仅与前面定义的施多姆函数列相差一个正的常数因子，不影响变号数．

例 4　求上题 $f(x)$ 的施多姆函数列在 $x=1$ 时的变号数．

解　将 $x=1$ 代入上题 $f(x)$ 的施多姆函数列，得到数列 −4，2，9，281，−1，所以变号数为2．

三、施多姆函数列的性质

（1）任何两个相邻的函数都没有公共根．

假如 $f_i(x)$和 $f_{i+1}(x)$ 有公共根 $x=\alpha$,则 $f_i(x)$ 和 $f_{i+1}(x)$ 都可被 $x-\alpha$ 整除. 由(2)式有

$$f_{i-1}(x)=f_i(x)q_i(x)-f_{i+1}(x),$$

等式右端可被 $x-\alpha$ 整除，所以 $f_{i-1}(x)$ 也可被 $x-\alpha$ 整除. 再倒推至(1)中前一等式，得 $f_{i-2}(x)$ 可被 $x-\alpha$ 整除. 以此类推，就会得到 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 可被 $x-\alpha$ 整除，这与 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互质矛盾，故 $f_i(x)$ 和 $f_{i+1}(x)$ 没有公共根.

(2)设 α 是施多姆中间函数 $f_i(x)$ 的实根，那么 $f_{i-1}(x)$ 和 $f_{i+1}(x)$ 在 $x=\alpha$ 必有相反符号. 除施多姆函数列的第一个与最后一个之外，都叫做施多姆中间函数.

这是由于 $f_i(\alpha)=0$，故由

$$f_{i-1}(\alpha)=f_i(\alpha)q_i(\alpha)-f_{i+1}(\alpha)$$

或

$$f_{i-1}(\alpha)=-f_{i+1}(\alpha)$$

得知 $f_{i-1}(x)$ 与 $f_{i+1}(x)$ 在 $x=\alpha$ 处具有相反的符号.

(3)若 x 增加并经过某一个施多姆中间函数的实根，则施多姆函数列的变号数不变.

设 $f_i(\alpha)=0$，即 α 为 $f_i(x)$ 的实根. 由性质(1)(2)知道，$f_{i-1}(\alpha)$和$f_{i+1}(\alpha)$不为零且符号相反，不妨假设$f_{i-1}(\alpha)<0$，$f_{i+1}(\alpha)>0$. 由于多项式的图象是连续曲线，所以存在充分小的区间 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$，使 $f_{i-1}(x)$，$f_{i+1}(x)$ 在该小区间里保持自己的符号. 这样，不论 x 在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 取何值，$f_{i-1}(x)$，$f_{i+1}(x)$ 保持原来的一个变号数，于是整个施多姆函数的变号数在此邻域里保持不变.

(4)若 x 增加并经过 $f(x)$ 实根 a，则 $f(x)$ 与 $f'(x)$之间的变号数要减少一个.

由于多项式的连续性，所以可取充分小的邻域 $(\alpha-\varepsilon$，

$\alpha+\varepsilon$)，使 $f(x)$ 在此邻域里仅有根 α，而 $f'(x)$ 在此邻域里无根.

当 x 通过 α 时，$f(x)$ 必然变号，这是因为我们前面曾经假设 $f(x)$ 无重根，所以曲线 $y=f(x)$ 必然穿过横轴的缘故.而 $f'(x)$ 在 $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ 里却不变号，这是因为 $f'(x)$ 在此邻域里无根.

这时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的符号情况只有下列两种情况：

x	$f(x)$	$f'(x)$	变 号 数
$x<\alpha$	$-$	$+$	1
$x>\alpha$	$+$	$+$	0

(因为 $f(x)$ 从－到＋为增加，所以 $f'(x)>0$)

x	$f(x)$	$f'(x)$	变 号 数
$x<\alpha$	$+$	$-$	1
$x>\alpha$	$-$	$-$	0

(因为 $f(x)$ 从＋到－为减少，所以 $f'(x)<0$)

因此，无论何种情况，当 x 通过 α 时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变号数从 1 到 0，即减少一个.

四、施多姆定理

为了判断实系数多项式在某区间里的实根的个数，我们建立下列施多姆定理.

定理 设 $f(x)$ 是无重根的多项式，a，b 都不是 $f(x)$ 的根.这时，$f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 内的实根数等于 x 由 a 增至 b 时，$f(x)$ 的施多姆函数列所减少的变号数，即 $f(x)$ 的施多

姆函数列在 a 处的变号数减去在 b 处的变号数.

证明 当 x 经过 $f(x)$ 的施多姆中间函数的根时，施多姆函数列的变号数没有变化. 当 x 经过 $f(x)$ 的实根时，由施多姆函数列性质(4)，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 之间减少一个变号数，所以整个施多姆函数列的变号数减少一个. 反之也对. 所以当 x 由 a 增至 b 时，变号数减少的数目必为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内所含的根的个数.

当区间 $[a,b]$ 变为 $(-\infty,+\infty)$ 时上述定理仍然成立.

例 5 试求多项式 $f(x)=x^4-5x^2+8x-8$ 的正负实根个数.

解 由例 1 求得 $f(x)$ 的施多姆函数列：

$$f(x)=x^4-5x^2+8x-8,$$
$$f'(x)=4x^3-10x+8,$$
$$f_1(x)=5x^2-12x+16,$$
$$f_2(x)=-3x+284,$$
$$f_3(x)=-1.$$

计算它的变号数于下表：

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	变号数
$-\infty$	+	−	+	+	−	3
0	−	+	+	+	−	2
∞	+	+	+	−	−	1

$f(x)$ 的施多姆函数列在$(-\infty,0]$之间的变号数减少 $3-2=1$，在$[0,+\infty)$之间的变号数减少 $2-1=1$，所以$f(x)$有一个负根，有一个正根. 还有一对共轭复根.

例 6 试求 $f(x)=3x^4-4x^3-6x^2-12x+1$ 的实根个数以及它在 $[0,3]$ 里根的个数.

解 用辗转相除法求得 $f(x)$ 的施多姆函数列：

$$f(x)=3x^4-4x^3-6x^2-12x+1,$$

$$f'(x)=12(x^3-x^2-x-1),$$

$$f_1(x)=2x^2+5x,$$

$$f_2(x)=-31x+4,$$

$$f_3(x)=-1.$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	变号数
$-\infty$	+	−	+	+	−	3
0	+	−	0	+	−	3
∞	+	+	+	−	−	1

由上表看出，$f(x)$ 有 2 个正根.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	变号数
0	+	−	0	+	−	3
3	+	+	+	−	−	1

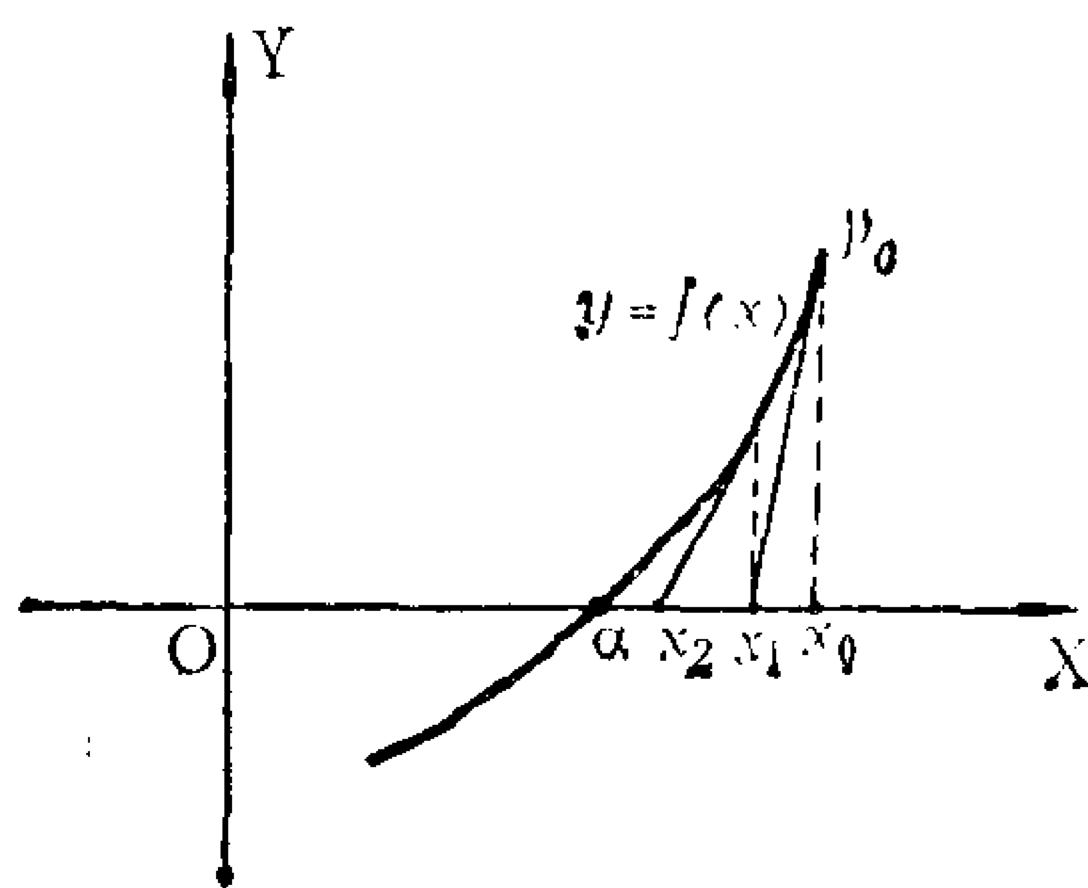
由上表看出，$f(x)$ 在 $[0,3]$ 中有 2 个根，亦即是 $f(x)$ 的全部实根了.

利用施多姆定理可以将根隔离. 寻找使 $f(x)$的施多姆函数列之变号数减少一的区间，那么这个区间里仅有 $f(x)$ 的一个根. 把根隔离出来后，就可以近似计算实根了.

需要特别指出，运用施多姆定理的前提是多项式不含重根

或重因式．在有重根或重因式的情况下，首先要求出 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最高公因式 $d(x)$，$d(x)$ 就是 $f(x)$ 的重因式部分；其次用 $d(x)$ 除 $f(x)$ 得商式 $q(x)$，那么 $q(x)$ 就不含重因式且包含 $f(x)$ 的所有不同的根；然后再对 $q(x)$ 运用施多姆定理，求出实根个数，将根隔离并找出只含一个根的区间；最后进行近似计算．

五、用切线法求根的近似值



（图 3 ）

在方程 $f(x)=0$ 的根 $x=\alpha$ 的近旁取 $x=x_0$ 作为初值，在点 $(x_0, f(x_0))$ 处作曲线 $y=f(x)$ 的切线，由图 3 的情形看出，该切线与 x 轴的交点 x_1 将比 x_0 更接近根 α．点 $x=x_1$ 叫做方程的第一次近似根．x_1 求出后，在点 $(x_1, f(x_1))$ 处作曲线 $y=f(x)$ 的切线，那么该切线与 x 轴交点 x_2 又比 x_1 更接近根 α．点 $x=x_2$ 叫做方程的第二次近似根．以此类推，就可以求得根 α 的一系列近似值 $x_1, x_2, \cdots$．

将上述想法解析地表达如下．

过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

假设 $f'(x_0)\neq 0$．该切线与横轴 $y=0$ 的交点是 $(x_1, 0)$，于是 $(x_1, 0)$ 满足切线方程，代入后得

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0),$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1-x_0,$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

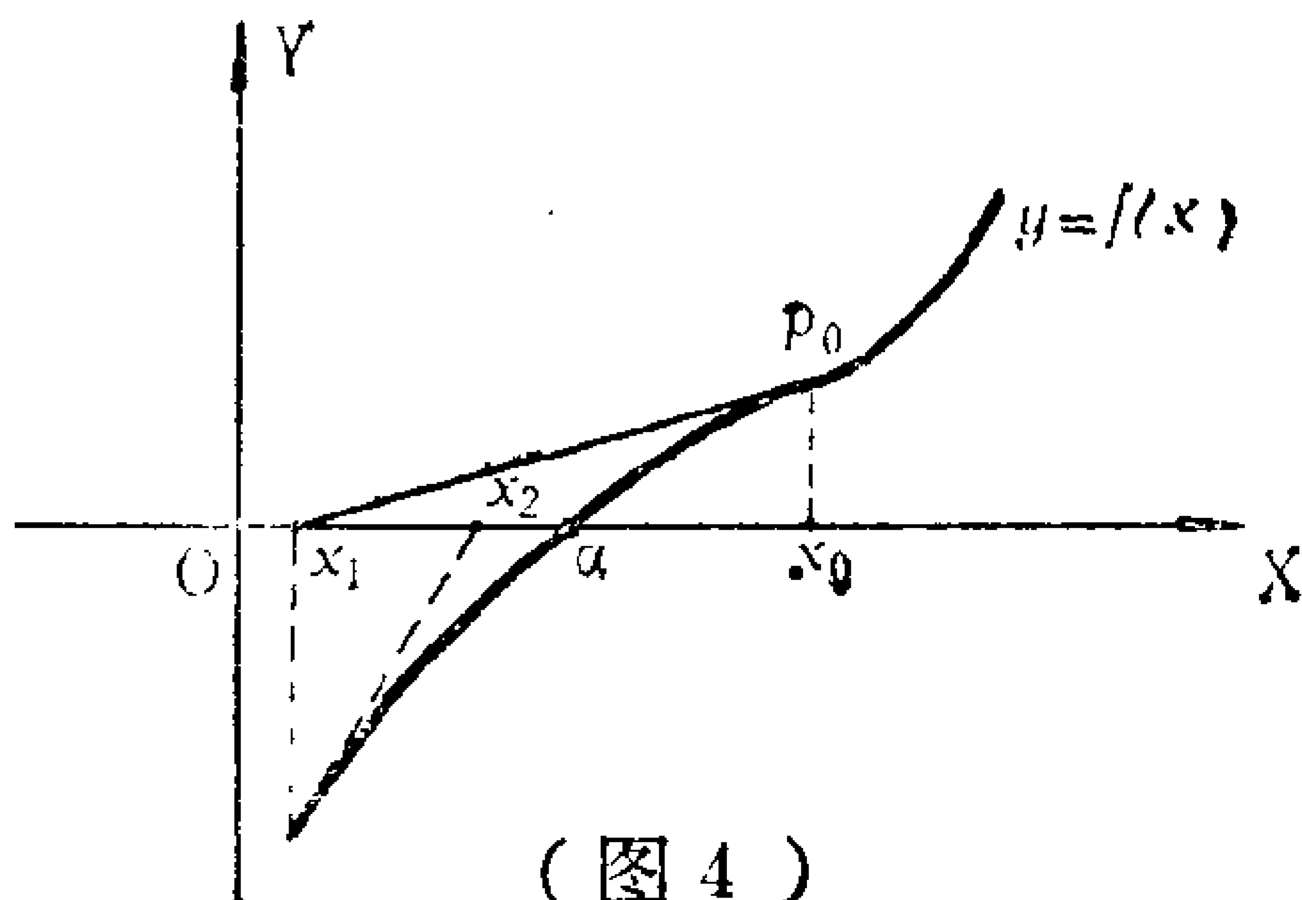
同样，过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线与横轴 $y=0$ 的交点的横坐标 x_2，可由下式求得：

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (f'(x_1)\neq 0).$$

一般情况，根 α 的第 n 次近似根是

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (f'(x_{n-1})\neq 0). \qquad (3)$$

使用切线法时，函数的图象应象图 3 中所示的情况那样才好，即曲线凸向横轴. 如果象图 4 那样，x_1反而比x_0更远离根 α. 为了防止这种情况，可假设



（图 4 ）

$$f(x_0)f''(x_0)>0.$$

这时，曲线在点 p_0 处总是凸向横轴的.

如果函数 $f(x)$ 在点 α 处不满足条件而着手进行计算，那么这也是无妨的，因为在 x_1 远离 α 后，继续做下去仍可以再次接近根 α 的. 因为这时总有点 $(x_i,\ f(x_i))$ 使曲线再次凸向横轴，亦即再行满足条件 $f(x_i)f''(x_i)>0$. 总之，在 $f'(x_0)$, $f'(x_1)$, … 不等于零的情况下，用切线法求近似根总是可行的.

例 7　求 $x^3-2x-5=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根近似值.

解　取 $x_0=2$ 作为初值进行计算.

$$x_1=2-\frac{f(2)}{f'(2)}=2-\frac{-1}{10}=2.1,$$

$$x_2=2.1-\frac{f(2.1)}{f'(2.1)}\approx 2.1-\frac{0.0061}{11.23}$$

$$\approx 2.09457.$$

在§14中我们用对分法计算了上述方程的这个根，对分区间六次，计算量又大. 在这里求到第二次近似根所得之结果已比那时好得多（根的准确值是 $\alpha=2.0945514815\cdots$）.

高次方程的近似求解方法甚多，可参考有关计算数学的书.

思考与练习

1. 应用施多姆定理证明无重因式的实系数三次多项式 x^3+px+q 在 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ 条件下只有一个实根，在 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 的条件下有三个实根.
2. 确定多项式 $x^4-2x^3+x^2-2$ 实根的个数.
3. 确定多项式 $x^4-6x^3-8x^2+4x-1$ 正负根的个数.
4. 用切线法求 $6x^3+8x^2-3x-4=0$ 的正根之近似值，精确到0.01.

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]
书名= 方程与多项式
作者= 王祖樾编
页数= 1 0 8
S S 号= 1 0 0 6 8 4 6 5
出版日期=

目录
正文